

טורן

שאלה: נתון גרף נטול k -קליקות עם n קודקודים. מהי כמות הקשתות המקסימאלית בגרף? באילו גרפים מתקבל המקסימום.

למה. גרף נטול k -קליקות עם n קודקודים מכיל קודקוד מדרגה $\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \rfloor$ לכל היותר.

- א. נתון פנס ו- $2n + 1$ סוללות ($n > 2$). ידוע שכמות הסוללות החדשות גדולה ב-1 מכמות הסוללות הריקות, אך לא ידוע אילו סוללות הן חדשות ואילו ריקות. ניתן להכניס שתי סוללות לתוך הפנס והוא יאיר אך ורק אם שתיהן חדשות. כמה נסיונות נדרשים על מנת להפעיל את הפנס בוודאות?
- ב. אותה השאלה, אך כאשר יש $2n$ סוללות ($n > 2$), וידוע שיש אותה כמות של סוללות חדשות וסוללות ריקות.

- במדינה רחוקה 2001 ערים. כל עיר מחוברת לפחות עם 1600 ערים אחרות. מצאו את ה- k המקסימלי עבורו חייבת להיות k קליקה.
- על מעגל נבחרו 21 נקודות. הוכיחו שיש לפחות 100 זוגות של נקודות, שיוצרות קשת שאורכה אינו עולה על 120° .
- נתונות $5n$ נקודות במישור. הן קצוות של $10n^2 + 1$ קטעים שצבועים בשני צבעים. הוכיחו שיש משולש מונוכרומטי.
- זוג נקודות במישור נקרא מגניב אם מרחק מנהטן ביניהן גדול מ-1 וקטן שווה ל-2. במישור סומנו 100 נקודות. מהי הכמות המקסימלית של זוגות מגניבים?
- בגרף $2n$ קודקודים ו- $n^2 + 1$ קשתות. הראו כי בגרף יש שני משולשים שונים בעלי צלע משותפת.
- נתונות 101 תתי קבוצות של $\{1, 2, \dots, n\}$. גודל האיחוד של כל 50 קבוצות הוא מעל ל- $\frac{50}{51}n$. הוכיחו כי קיימות שלוש קבוצות כך שבכל שתיים יש איבר משותף.
- נתון גרף בעל n קודקודים ו- m קשתות. נסמן ב- $\bar{\Delta}$ את כמות המשולשים בגרף ועוד כמות המשולשים בגרף המשלים. הראו כי

$$\bar{\Delta} \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - (n-1)m$$

- הראו כי בגרף בעל n קודקודים ו- m קשתות יש לפחות $\frac{4m^2}{3n} - \frac{nm}{3}$ משולשים.

9. לכנס מתמטי הגיעו 2017 משתתפים, חלק מכירים וחלקם לא. כל שני משתתפים שמכירים מעדיפים לדבר זה עם זה בעברית או באנגלית. ידוע שמבין כל 4 מתמטיקאים יש כמות זוגית של הכרויות ובנוסף לכך מתוך הכמות הזוגית הזו:

(i) יש לפחות זוג אחד של מתמטיקאים שמעדיפים לדבר בעברית.

(ii) אם יש זוג מתמטיקאים שמעדיפים לדבר באנגלית אז כמות הזוגות שמדברים באנגלית מתוך הרביעיה היא לפחות כמות הזוגות שמדברים בעברית ברביעיה.

הוכיחו כי הגיעו לכנס לפחות 673 מתמטיקאים שכל שניים מעדיפים לדבר זה עם זה בעברית.

10. במישור עומדים 24 רובוטים נקודתיים, לכל רובוט זווית ראייה של 70° . כל רובוט מאתר את כל הרובוטים הנמצאים בזווית הראייה שלו ומשדר את המספר הזה למעבד הראשי, המעבד הראשי סוכם את כל המספרים ששודרו לו ומדפיס את המספר על דף גדול. מהו המספר הגדול ביותר שיכול להיות מודפס על הדף הגדול?

11. נתונה קבוצה של 120 חברי כנסת, חלקם חברים וחלקם אויבים. רביעית חברי כנסת שמתוכם רק שניים חברים נקראת רביעיה לא ידידותית. מה היא הכמות המקסימלית של רביעיות לא ידידותיות בכנסת?

12. מהי הכמות המרבית של קליקות מקסימליות בגרף עם n קודקודים?

בתאבון!