הצבות טריגונומטריות

1. נתון ש-$a_0 = 2023$ ו-$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ נמצאו את a_{2024}.

<u>פתרון:</u> נסמן $a_n = \tan(\alpha_n)$ אזי

$$\tan(\alpha_{n+1}) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan(\alpha_n)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\alpha_n)} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha_n)$$

ולכן $\tan(\alpha_{n+4}) = \tan(\alpha_n + \pi) = \tan(\alpha_n)$ כלומר ל-a_n יש מחזור באורך 4. נסיק ש-$a_{2024} = a_0 = 2023$.

2. פתרו את המערכת

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> ברור ש-$x, y, z \geq -1$. אם $x > 1$ אז $y > x^2 > x > 1$ ובאותו אופן $z > y$ ו-$x > z$ סתירה. לכן $|x| \leq 1$, נסמן $x = \cos\alpha$ ולכן

$$y = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

ובאותו אופן $z = \cos 4\alpha$ ו-$\cos\alpha = x = \cos 8\alpha$ ולכן
$8\alpha = \pm\alpha + 2\pi k$ מעבר על מקרים נותן את הפתרונות:

$$(\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{4\pi}{9}, -\cos\frac{\pi}{9}), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1,1,1), (\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{9}, \cos\frac{8\pi}{9})$$

3. פתרו את המשוואה

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x$$

<u>פתרון:</u> ברור ש-$x > \sqrt{2}$ מצד שני $\sqrt{2 + x} \leq 2$ ולכן $2 \geq x > \sqrt{2}$.

נסמן $x = 2\cos\alpha$ כאשר $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$. נשים לב ש-

$$2+x=2(1+cos\alpha)=4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ולכן

$$2-\sqrt{2+x}=2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=4\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

כלומר

$$\begin{aligned}2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}&=2\left(1+\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)\\&=2\left(1+2\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right)\\&=2\left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)+2\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right)\end{aligned}$$

סך הכל המשוואה הופכת ל-

$$\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right)=2\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha$$

ולכן

$$\alpha=\pm\left(\frac{\alpha}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k$$

כלומר יש שני מקרים:

מקרה ראשון: $\frac{7}{8}\alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ כלומר $\alpha=-\frac{2\pi}{7}+\frac{16}{7}\pi k=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi k$ שזה בתחום רק כאשר $\alpha=0$ כלומר $x=2$ שזה בברור לא פתרון של המשוואה.

מקרה שני: $\frac{9}{8}\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ כלומר $\alpha=\frac{2\pi}{9}+\frac{16}{9}\pi k=\frac{2\pi}{9}-\frac{2}{9}\pi k$ שזה בתחום רק כאשר $\alpha=0$ (שלא עובד) או $\alpha=\frac{2\pi}{9}$ שדווקא נותן פתרון.

4. תהי הסדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1 = x$, $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$.
מצאו את כמות הערכים השונים של x עבורם $a_{2023} = 0$.

<u>פתרון:</u> נשים לב שאם $a_{n+1} \geq 0$ אז
$0 \geq 4a_n - 4a_n^2 = 1-(2a_n-1)^2 \geq 0$ ולכן

$$1 \geq 2a_n - 1 \geq -1$$

$$1 \geq a_n \geq 0$$

ולכן אם $a_{2023} = 0$ אז $1 \geq x \geq 0$ ונוכל לסמן $x = \sin^2\alpha$.
עבור $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

$$a_2 = 4\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha) = \sin^2 2\alpha$$

ולכן

$$a_{2023} = \sin^2 2^{2022}\alpha = 0$$

ולפיכך $\alpha = \frac{\pi k}{2^{2022}}$ ובשביל ש-α יהיה בתחום צריך ש-k יהיה קטן או שווה ל-2^{2021} ולכן יש $2^{2021}+1$ ערכים מתאימים.

5. מבין הפתרונות הממשיים של המערכת

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+t^2=9 \\ xt+yz=6 \end{cases}$$

מצאו את הפתרונות עבורם $x+z$ מקסימלי.

<u>פתרון:</u> נגדי וקטורים $u=(x,y), v=(t,z)$. המערכת הנתונה שקולה לכך ש-$|u|=2, |v|=3$ ו-$u\cdot v = 6 = |u||v|$. נסיק ש-u,v מקבילים, כלומר קיימים a,b כך ש-$u=2(a,b), v=3(a,b)$. נסמן $a=\cos\alpha, b=\sin\alpha$ ולכן

$$x+z = 2\cos\alpha + 3\sin\alpha = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\alpha + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin\alpha\right)$$
$$= \sqrt{13}\sin(\alpha+\beta)$$

כאשר $\beta = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} = acrcos\frac{3}{\sqrt{13}}$. נסיק ש-$x + z \leq \sqrt{13}$ ושוויון מתקיים כאשר $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ כלומר $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ולכן

$$(x, y, t, z) = (\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}})$$

6. הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים ש-

$$\left|\frac{(1-x)x(1+x)}{(1+x^2)^2}\right| \leq \frac{1}{4}$$

<u>פתרון:</u> נציב $x = \tan\alpha$ נכפיל ב-4 ונקבל שעלינו להוכיח ש-

$$\left|\frac{4\tan\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}\right| \leq 1$$

$$|4\tan\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1)| \leq 1$$

$$|4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha| = |\sin 4\alpha| \leq 1$$

7. כמה שורשים בקטע $[0,1]$ יש למשוואה

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

<u>פתרון:</u> נסמן $x = \cos\alpha$ כאשר $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. אז $2x^2 - 1 = \cos 2\alpha$ ו-

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2\cos 2\alpha - 1 = \cos 4\alpha$$

ולכן

$$8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = -1$$

נכפיל את שני האגפים ב-$\sin\alpha$ ונקבל ש-

$$\sin 8\alpha = \sin -\alpha$$

ולכן $8\alpha = -\alpha + 2\pi k$ או $8\alpha = \pi + \alpha + 2\pi k$ ולכן $\alpha = \frac{2}{9}\pi k$ או $\alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k$

וכיוון ש-$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ה-α-פות שמתאימות הן:

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$$

כמובן שצריך להציב ולבדוק אילו שורשים מתאימים. נקבל שכולם חוץ מ-$\alpha = 0$ עובדים (שזה הגיוני, הוא התווסף בגלל שהכפלנו ב-$\sin\alpha$).

8. נתונים x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ממשיים שונים. הוכיחו כי קיימים $1 \le i < j \le 5$ כך ש-

$$\left|x_i x_j + 1\right| > \left|x_i - x_j\right|$$

<u>פתרון:</u> נסמן $x_i = tan\alpha_i$ עבור $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ ונתסכל על ארבעת הקטעים $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right], \left(0, \frac{\pi}{4}\right], \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ משובך היונים יש שתי α-ות באותו הקטע. נניח ש-$|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{\pi}{4}$ ולכן

$$\left|\frac{x_i - x_j}{x_i x_j + 1}\right| = \left|\frac{tan\,\alpha_i - tan\alpha_j}{tan\alpha_i \cdot tan\alpha_j + 1}\right| = \left|\tan\left(\alpha_i - \alpha_j\right)\right| < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

9. הוכיחו כי

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \le (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

<u>פתרון:</u> נסמן $a = tan\alpha$ וכו'. נשים לב ש-$a^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ולכן עלינו להוכיח ש-

$$\left((ab + bc + ca - 1)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)^2 \le 1$$

נבחין ש-

$$\begin{aligned}(\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &= \sin\beta\sin(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

ובאופן דומה:

$$\begin{aligned}(\tan\alpha\tan\gamma-1)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &=\sin\alpha\, cos\,\beta\sin\gamma-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &=-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca-1)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &=\sin\beta\sin(\alpha+\beta)-\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\\ &=\cos\,(\alpha+\beta+\gamma)\end{aligned}$$

וקוסינוס בריבוע קטן שווה 1.

10. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} xy+xz+yz=1\\ 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right)\end{cases}$$

<u>פתרון:</u> נסמן $x=\tan\frac{\alpha}{2}, y=\tan\frac{\beta}{2}, z=\tan\frac{\gamma}{2}$.

$$1=xy+xz+yz$$

$$1-xy=z(x+y)$$

$$\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}=\tan\,(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})$$

ולכן $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$. נשים לב ש-

$$3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

שקול ל-

$$\frac{x}{3(x^2+1)}=\frac{y}{4(y^2+1)}=\frac{z}{5(z^2+1)}$$

ניזכר בנוסחה

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

ונקבל ש-

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}$$

כאשר α,β,γ או $-\alpha,-\beta,-\gamma$ הן זוויות של משולש ולכן הצלעות שלו הן 3,4,5. כלומר $\gamma=\pm\frac{\pi}{2}$ ו- $\sin\pm\alpha=\frac{3}{5},\cos\pm\alpha=\frac{4}{5},\sin\pm\beta=\frac{4}{5},\cos\pm\beta=\frac{4}{5}$.

נשאר לחשב:

$$\tan\pm\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\pm\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\pm\frac{\alpha}{2}}{\cos\pm\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\pm\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\pm\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\pm\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\pm\beta}{\sin\pm\beta}=\frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{2}$$

ולכן יש שני פתרונות $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}-1\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$.

11. נתונים x,y,z ממשיים עבורם $x+y+z=xyz$ הוכיחו כי

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

<u>פתרון:</u> נסמן $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ אז התנאי הופך ל-

$$ab+ac+bc=1$$

ואי השוויון נהיה

$$\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}}+\frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2+1}}+\frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2+1}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

או במילים אחרות,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

כפי שהסברנו בשאלה הקודמת ניתן להניח
ש-$x=\tan\alpha\,,y=\tan\beta\,,z=\tan\gamma$ כאשר $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. נשים
לב ש-

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\cos\alpha$$

ולכן מספיק להוכיח ש-

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

אבל בתחום $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ קוסינוס זו פונקציה קמורה ולכן המקסימום מתקבל
כאשר $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$ וניצחנו.