טורנירים!

טורניר הוא גרף מלא מכוון עם n קודקודים ו-$\binom{n}{2}$ קשתות.

נגיד שקודקוד u מנצח את קודקוד v אם יש קשת היוצאת מ-u ונכנסת ל-v.

ניקוד של קודקוד הוא מספר הניצחונות שלו, הניקוד של הקודקוד ה-i יסומן ב-w_i.

שאלות כלליות.

1. הוכיחו כי בכל טורניר קיים מסלול המילטון.

פתרון: ברור באינדוקציה, אפשר לצרף קודקוד למסלול קיים.

2. נתון פאון קמור, לכל מקצוע שלו נבחר כיוון. ידוע שלכל קודקוד יש לפחות מקצוע אחת שנכנסת אליו ואחת שיוצאת ממנו. הוכיחו שיש לפאון פאה שהיא מעגל.

פתרון: נספור את כמות הזוגות של מקצועות שנמצאות באותה הפאה ופונות לאותו הקודקוד, נקרא לזוג כזה "לא מסודר". בכל קודקוד v יש מקצוע שיוצאת ומקצוע שנכנסת ולכן יש לפחות שני זוגות עוקבים של מקצוע יוצאת ונכנסת ולכן יש לכל היותר $\deg(v) - 2$ זוגות לא מסודרים. נסכום על כל הקודקודים ונקבל שיש לכל היותר $2(E - V) = 2(F - 2)$ זוגות לא מסודרים. מצד שני בכל פאה יש כמות זוגות של זוגות לא מסודרים ולכן יש לפחות שתי פאון מסודרות כלומר שתי פאון שהן מעגל.

3. מצאו ביטוי לכמות המשולשים בטורניר כתלות ב-n ו-$w_1, w_2, \ldots, w_n$.

תשובה:

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{\sum w_i^2}{2}$$

אפשר להוכיח באינדוקציה או עם ספירת דובדבנים.

הגדרה: לכל שחקן i, מקדם שובר השוויון שלו מוגדר להיות סכום הנקודות שצברו השחקנים שהפסידו לו.

4. ידוע שכל מקדמי שוברי השווין שווים. הוכיחו כי כל השחקנים צברו כמות זהה של נקודות.

פתרון: נניח בשלילה שזה לא המצב, נסמן ב-M את כמות הנקודות המקסימלית וב-L את כמות הנקודות המינימלית. המקדם של אדם עם M נקודות הוא לפחות ML והמקדם של אדם עם L נקודות הוא לכל היותר LM ולכן חייב להתקיים שוויון כלומר האנשים עם M נקודות ניצחו רק אנשים עם L נקודות ולכן יכול להיות רק מישהו אחד עם M נקודות ובאופן דומה יש רק מישהו אחד עם L נקודות. כלומר האדם עם M נקודות ניצח רק מישהו אחד ואם יש לפחות 3 אנשים בטורניר אז יש מישהו לפחות עם 2 נקודות (כי לא כולם קיבלנו 1).

5. הוכיחו כי מקדמי שוברי השוויון של השחקנים שצברו כמות מקסימלית של נקודות לא קטנים ממקדם שובר השוויון הממוצע בטורניר.

פתרון: נחשב את סכום המקדמים בטורניר. שחקן שקיבל w_i נקודות תורם למקדמים של $(n-1-w_i)$ אנשים אחרים ולכן מוסיף $w_i(n-1-w_i)$ לסכום המקדמים. לפיכך כל שחקן מוסיף לכל היותר $\frac{(n-1)^2}{4}$ לסכום המקדמים ואם n זוגי אז אפילו לכל היותר $\frac{(n-1)^2-1}{4}$.

כעט נבחר את אחד המנצחים בטורניר, נסמן אותו ב-1. יש $n-1-w_1$ אנשים שניצחו את 1, כל אחד מהם צבר לכל היותר w_1 נקודות ולכן סכום הנקודות של המתחרים שהפסידו ל-1 היא לפחות

$$\binom{n}{2}-w_1(n-1-w_1)-w_1=\binom{n}{2}-w_1(n-w_1)$$
$$\geq \frac{n(n-1)}{2}-\frac{n^2}{4}=\frac{n(n-2)}{4}=\frac{(n-1)^2-1}{4}$$

וזה מנצח.

טורנירים עם תיקו.

קשת שמכוונת מ-i ל-j תקרא מוזרה אם $w_j > w_i$.

שחקן יקרא מוזר אם הוא ניצח את כל האנשים שקיבלו יותר נקודות ממנו והפסיד לכל האנשים שקיבלו פחות נקודות ממנו.

6. עבור אילו k יתכן שיש בדיוק k שחקנים מוזרים?

פתרון: טענה: כל שני שחקנים מוזרים צברו כמות זהה של נקודות.

הוכחה: נניח ש-i, j מוזרים ו-$w_i > w_j$ אז j ניצח את i ולכן חייב להיות שחקן X ש-i צבר מולו יותר נקודות מ-j אבל אם X צבר פחות נקודות מ-i אז i הפסיד ל-X ואז לא טוב, במקרה האחר X צבר יותר נקודות מ-j ואז j ניצח את X וזה שוב לא טוב.

נחזור לשאלה. נניח שהשחקנים המוזרים לא ניצחו בטורניר (מותר להניח כי במקרה האחר הם לא הפסידו). שחקן שניצח בטורניר הפסיד לכל היותר $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ משחקים ולכן כמות השחקנים המוזרה חסומה מלמעלה על ידי $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$. נבנה דוגמה לכל $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

נבנה דוגמה עבור n זוגי, בסוף נתקן אותה למקרה האי-זוגי.

נשים k אנשים שיהיו מוזרים ולידם נשים עוד k אנשים שיהיו הגיוניים וינצחו את כל מי שצבר פחות נקודות מהם ויפסידו לכל מי שצבר יותר נקודות מהם. כל $2k$ האנשים ישחקו בתיקו זה עם זה.

נשים $\frac{n}{2} - k$ אנשים שיהיו המנצחים בטורניר ו-$\frac{n}{2} - k$ שיהיו המפסידים בטורניר. כל שני מנצחים עושים תיקו וכך גם כל שני מפסידים, המנצחים מנצחים את המפסידים ואת ההגיוניים ומספידים למוזרים. המפסידים מנצחים את המוזרים ומפסידים להגיוניים ומנצחים.

כך המנצחים צוברים $\frac{3n}{4} - \frac{k}{2} > \frac{n}{2}$ נקודות, המפסידים צוברים $\frac{n}{4} + \frac{k}{2} < \frac{n}{2}$ נקודות, והמוזרים וההגיוניים צוברים $\frac{n}{2}$ נקודות.

בשביל דוגמה עבור n אי-זוגי אפשר להוסיף אדם הגיוני והכל עדיין יעבוד.

7. מה האחוז המקסימלי של קשתות מוזרות בטורניר?

<u>פתרון:</u> ל-$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ השחקנים עם כמות הנקודות הגדולה נקרא חזקים ולשאר חלשים. נניח שהיו a משחקים לא מוזרים בין החזקים לחלשים. הניקוד הממוצע של שחקן חזק הוא לפחות

$$\frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{2} + \frac{a}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

ואילו הניקוד הממוצע של שחקן חלש הוא לכל היותר

$$\frac{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{2}+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\frac{a}{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$$

מכאן נובע ש-

$$\frac{n}{2}<\frac{an}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)}$$

כלומר

$$\frac{(n^2-1)}{8}<\frac{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)}{2}<a$$

ולכן אחוז המשחקים המוזרים הוא לפחות

$$\frac{n+1}{4n}>\frac{1}{4}$$

דוגמה: נבנה טורניר שיש בו n קבוצות ובכל קבוצה $2n$ אנשים. בתוך הקבוצה יהיה טורניר טרניזיטיבי כלומר ינצח בנאדם עם המספר הקטן יותר. בין הקבוצות האדם ה-i ישחק בתיקו עם האדם i והאדם ה-$n \pm i$, בין שני אנשים שהפרש המספרים שלהם קטן מ-n ינצח האדם עם המספר הגדול יותר ואם ההפרש גדול מ-n אז מנצח האדם עם המספר הקטן יותר.

ברור שכל שחקן מקבוצה i צובר n נקודות מול האנשים בקבוצה $j \neq i$ לפיכך הדירוג של האנשים בטורניר זהה למספור שלהם.

נספור את כמות המשחקים הלא מוזרים: כל המשחקים בתוך הקבוצות לא מוזרים אבל מכלל המשחקים הם מהווים רק $\frac{1}{n}$ מכלל המשחקים (בעצם קצת פחות). כל משחק שנגמר בתיקו אינו מוזר אבל גם הם תורמים רק $\frac{1}{n}$ מהמשחקים. נספור ניצחונות לא מוזרים בין אנשים מקבוצות שונות: אדם עם מספר שגדול מ-n תורם כלום ואדם מספר $k \leq n$ תורם $n-k$ משחקים ולכן יש $n(n-1)$ משחקים לא מוזרים מסוג זה, שזה פחות מרבע המשחקים בטורניר.

סך הכל קיבלנו שיש פחות מ-$\frac{1}{4}+\frac{2}{m}$ משחקים לא מוזרים ולכן ככל שנגדיל את m כך נתקרב ל-$\frac{1}{4}$.

8. א. האם קיים טורניר שהיו בו בדיוק שני משחקים שנגמרו בתיקו, כל שני שחקנים צברו כמות שונה של נקודות ויש שחקן מוזר?

<u>פתרון:</u> נתחיל מטורניר טרנזיטיבי על $2n+1$ שחקנים, נהפוך את כל התוצאות של שחקן מספר $n+1$ ובנוסף נגיד ששחקן 1 ו-n עשו תיקו וכך גם $n+2$ עם $2n+1$. קל לראות ש-$n+1$ מוזר וכל התנאים מתקיימים.

ב. בטורניר היה רק תיקו אחד וכל שני שחקנים צברו כמות שונה של נקודות. הוכיחו כי לא היו שחקנים מוזרים.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה שיש אדם מוזר. נוכיח באינדוקציה, נבחר את האדם המוזר X ואת שני שכניו בדירוג $A<X<B$. הפרש הנקודות בין A ל-B הוא לפחות 1. נוריד את X כל האנשים שמדורגים מתחת ל-X איבדו נקודה והניקוד של אנשים מעל ל-X לא השתנה. המרחק בין A ל-B הוא לפחות 2 עכשיו. נוכיח למה:

ההפרש בין כל שני אנשים לא עולה על 2, יתר על כן, אם ההפרש הוא 2 אז שני האנשים לא השתתפו בתיקו.
הוכחה: בטורניר עם N אנשים הפרש הנקודות בין המנצח למפסיד הוא לכל היותר $N-1$ שמתקבל כאשר כל ההפרשים הסמוכים הם בדיוק 1. מצד שני ההפרש בין כל שני אנשים סמוכים הוא לפחות 1 חוץ מלכל היותר 4 הפרשים בין שני האנשים שהשתתפו בתיקו והשכנים שלהם. ארבעת ההפרשים של תיקו מקטינים את ההפרש ב-2 ולכן ברור שלא יכול להיות הפרש שגדול מ-3 בין שני אנשים סמוכים. יתר על כן, אם יש הפרש של 3 אז ההפרש בין המנצח למפסיד הוא בדיוק $N-1$, באופן דומה אם יש הפרש של 2.5 אז אחד האנשים שלנו משתתף בתיקו ולכן כבר תפסנו את אחד מארבעת ההפרשים החצי שלמים ושוב נקבל שההפרש בין המנצח למפסיד הוא בדיוק $N-1$. במקרה האחרון שבו יש הפרש של 2 אבל אחד האנשים שמשתתף בהפרש זה עשה תיקו, נובע שהשחקן שמולו עשה תיקו הוא השחק בהפרש 2 ממנו (אחרת ההפרש היה יוצא חצי שלם) ולכן תפסנו שניים מתוך ארבעה הפרשים חצי שלמים ושוב קיבלנו שההפרש בין המנצח למפסיד חייב להיות $N-1$.
אם המנצח בטורניר לא משתתף בהפרש שגדול שווה ל-2 אז נוציא אותו (אחרת נוציא את המפסיד), כיוון שהמנצח בטורניר ניצח את כל המשחקים שלו, קיבלנו טורניר קטן יותר שבו מתקיימים כל התנאים וניתן להמשיך להוציא אנשים. הלמה הוכחה.

מהלמה נובע שהמרחק בין A ל-B הוא בדיוק 2 ושהם לא השתתפו בתיקו, אבל אם נחזיר את X נקבל שהמרחק בין A ל-X ובין X ל-B הוא חצי שזה לא אפשרי כיוון שאף אחד משלושתם לא השתתף בתיקו.

אי פריקות

טורניר יקרא פריק אם יש חלוקה של הקודקודים שלו לשתי קבוצות כך שכל קודקוד בקבוצה הראשונה ניצח כל קודקוד בקבוצה השנייה.

טורניר יקרא קשיר חזק אם מכל קודקוד יש מסלול לכל קודקוד אחר.

1. הוכיחו כי טורניר הוא קשיר חזק אם ורק אם הוא אי-פריק.

<u>פתרון:</u> ברור.

2. הוכיחו כי בכל טורניר אי-פריק **כל קודקוד** מוכל במעגל מאורך k לכל k בין 3 ל-n.

<u>פתרון:</u> נוכיח באינדוקציה, בסיס האינדוקציה ברור: יש בטורניר משולש אחרת הוא היה טרנזיטיבי ולכן פריק.

צעד: נניח מצאנו מעגל C באורך k שמכיל את הקודוקד הרצוי. אם קיים קודקוד u לא ב-C שניצח מישהו מ-C והפסיד למישהו ב-C אז אפשר להוסיף אותו למעגל. במקרה האחר כל קודקוד או ניצח את כולם ב-C (נקרא לקודקודים כאלו מנצחים) או הפסיד לכולם ב-C (נקרא לכאלו מפסידים). חייבים להיות גם מנצחים וגם מפסידים כי אחרת הגרף היה פריק, יתר על כן, חייבת להיות קשת ממפסיד למנצח אחרת הגרף שוב פריק. נבנה מעגל חדש: נבחרת מפסיד u ומנצח v כך ש-u ניצח את v ו-$w_1, \dots, w_{k-1} \in C$ (כך שהקודקוד המבוקש נמצא באחד מהם) נקבל מעגל: $u \to w_1 \to \cdots \to w_{k-1} \to v \to u$.

3. הוכיחו כי בטורניר אי-פריק ישנם לפחות $n-2$ משולשים.

<u>פתרון:</u> נוכיח באינדוקציה על k שבכל מעגל באורך k יש לפחות $k-2$ משולשים. הבסיס ברור. ניקח מעגל מאורך k אם יש אלכסון באורך 2 במעגל שמכוון עם כיוון המעגל אז אפשר להוריד קודקוד אחד, מהנחת האינדוקציה במעגל באורך $k-1$ יהיו $k-3$ משולשים ואז הקודקוד הנוסף חייב ליצור עוד משולש כי הוא מתחבר לשני הקודקודים השכנים שלו במעגל בקשתות בכיוונים הפוכים ולכן יהיו שני קודקודים עוקבים במעגל שהקודקוד הנוסף מתחבר אליהן בכיוונים הפוכים וזה יוצר משולש.

אם אין אלכסון באורך 2 בכיוון של המעגל אז יש $k-2$ אלכסונים בכיוונים הפוכים והם כולם יוצרים משולשים.

4. מה היא הכמות המינימלית של תתי טורנירים אי-פריקים מגודל k בתוך טורניר אי-פריק?

<u>פתרון:</u> נוכיח באינדוקציה על n שיש לפחות $n-k+1$ טורנירים אי-פריקים. בסיס זה $n=k$. בטורניר קיים מעגל מאורך $n-1$ מהנחת האינדוקציה הטורניר הזה מכיל לפחות $n-k$ טורנירים אי-פריקים. הקודקוד הנוסף מוכל במעגל מאורך k וזה מוסיף עוד טורניר.

דוגמה: מסלול שבו הקשתות מכוונות מ-1 עד n אבל כל קשת שלא במסלול (כלומר בקפיצה לפחות 2) מכוונת בכיוון ההפוך.

5. מצאו את הכמות המינימלית האפשרית של מעגלים בטורניר אי-פריק.

<u>פתרון:</u> בהוכחה של השאלה הקודמת בעצם דיברנו על מעגלים אז צריך רק לסכום את כל החסמים מ-1 עד n ונקבל שיש לפחות $\binom{n-1}{2}$ מעגלים, זה גם הדוק כיוון שהדוגמה שלנו לא הייתה תלויה ב-k.

6. מצאו את הכמות המקסימלית של מעגלים באורך 4 בטורניר.

<u>פתרון:</u> יש חסם ברור: כל קודקוד פוסל $\binom{w_i}{3}$ מרובעים שלא יכולים להיות מעגל ולכן יש לכל היותר $\binom{n}{4}-\sum\binom{w_i}{3}$ מעגלים באורך 4. כאשר כל ה-w_i בערך שווים נקבל את החסם הכי טוב: כמות המעגלים מאורך 4 חסומה על ידי

$$\binom{n}{4}-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{3}-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\binom{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}{3}$$

דוגמה: באופן כללי יש שני סוגי מרובעים, כאלו שיש בהם בדיוק מעגל אחד מאורך 4 ומרובעים פריקים. המרובעים הפריקים גם הם מתחלקים לשני סוגים: מרובעים טרנזיטיביים ומרובעים שמתקבלים ממשולש וקודקוד שמנצח או מפסיד לכל המשולש. בשביל שהחסם שלנו יהיה הדוק אנחנו צריכים לבנות גרף רגולרי שבו אין מרובעים שמורכבים ממשולש וקודקוד דבוק.

זה לא קשה: אם $n=2k+1$ נסדר את השחקנים במעגל ונחליט שכל שחקן מנצח את ה-k השחקנים הבאים במעגל ומפסיד ל-k השחקנים

לפניו במעגל. כל מה שצריך לשים לב אליו זה שאם בחרנו שלושה קודקודים שיוצרים משולש בגרף, הם מחלקים את המעגל ל-3 קשתות באורך שקטן מ-k ולכן כל קודקוד רביעי שנרצה לצרף יהיה באחת הקשתות ולכן יפסיד לתחילת הקשת וינצח את סוף הקשת.

אם $n = 2k$ מספיק להוריד קודקוד אחד מהגרף שתיארנו במקרה האי-זוגי.

<u>המשך הסיפור:</u> אפשר לפתור גם שאלה יותר כללית על כמות מקסימלית של תת-טורנירים אי-פריקים מגודל k. החסם עובד בדיוק באותה צורה: יש לכל היותר $\binom{n}{k} - \sum \binom{w_i}{k-1}$ טורנירים מהסוג שלנו וזה מקסימלי כאשר הגרף הכי קרוב לרגולרי.

הדוגמה היא אותה דוגמה, רק צריך להראות שכל תת-טורניר פריק חייב להיות טרנזיטיבי. אם יש תת-טורניר פריק, נסתכל על קבוצת המנצחים, אם יש יותר מ-1 ויש מעגל במנצחים אז בפרט חייב להיות מעגל באורך 3 וכפי שהסברנו במקרה של מרובעים אי אפשר להוסיף קודקוד רביעי למשולש שיפסיד לכולם. כלומר אין מעגלים בקבוצת המנצחים ובאופן דומה אין מעגלים בקבוצת המפסידים ולכן אין מעגלים כלל כלומר הטורניר טרנזיטיבי.

7. מצאו את הכמות המקסימלית של תתי-טורנירים טרנזיטיביים מגודל k בטורניר אי-פריק מגודל n.

<u>תשובה:</u> $\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}$

<u>פתרון:</u> עבור $k = 3$ השאלה נובעת משאלה 3 כי כל טורניר לא טרנזיטיבי על 3 קודקודים הוא משולש.

עבור $k = n$ השאלה ברורה. את שאר המקרים נוכיח באינדוקציה כפולה על n, k. קיים בגרף מעגל באורך $n - 1$, מעגל זה הוא תת גרף אי-פריק מגודל $n - 1$ שיש בו לכל היותר $\binom{n-1}{k} - \binom{n-3}{k-2}$ טורנירים טרנזיטיביים מגודל k ולכל היותר $\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-3}{k-3}$ טורנירים טרנזיטיביים מגודל $k - 1$ שביחד עם הקודקוד הנוסף יכולים ליצור טורנירים טרנזיטיביים בגודל k. סך הכל נקבל חסם של

$$\binom{n-1}{k} - \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-3}{k-3} = \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}$$

דוגמה: נבחר טורניר טרנזיטיבי ונחליף בו את הקשת בין הקודקוד הראשון לאחרון. נקבל טורניר אי-פריק שכל תת טורניר שלו טרנזיטיבי אלה אם הוא מכיל גם את הקודקוד הראשון וגם את הקודקוד האחרון ולכן יש בדיוק $\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}$ טורנירים טרנזיטיביים.

בניצחון!