

טורנירים!

טורניר הוא גרף מלא מכוון עם n קודקודים ו- $\binom{n}{2}$ קשתות.

נגיד שקודקוד u מנצח את קודקוד v אם יש קשת היוצאת מ- u ונכנסת ל- v .

ניקוד של קודקוד הוא מספר הניצחונות שלו, הניקוד של הקודקוד ה- i יסומן ב- w_i .

שאלות כלליות.

1. הוכיחו כי בכל טורניר קיים מסלול המילטון.
2. נתון פאון קמור, לכל מקצוע שלו נבחר כיוון. ידוע שלכל קודקוד יש לפחות מקצוע אחת שנכנסת אליו ואחת שיוצאת ממנו. הוכיחו שיש לפאון פאה שהיא מעגל.
3. מצאו ביטוי לכמות המשולשים בטורניר כתלות ב- n ו- w_1, w_2, \dots, w_n .
הגדרה: לכל שחקן i , מקדם שובר השוויון שלו מוגדר להיות סכום הנקודות שצברו השחקנים שהפסידו לו.
4. ידוע שכל מקדמי שוברי השוויון שווים. הוכיחו כי כל השחקנים צברו כמות זהה של נקודות.
5. הוכיחו כי מקדמי שוברי השוויון של השחקנים שצברו כמות מקסימלית של נקודות לא קטנים ממקדם שובר השוויון הממוצע בטורניר.

טורנירים עם תיקו.

- קשת שמכוונת מ- i ל- j תקרא מוזרה אם $w_j > w_i$.
- שחקן יקרא מוזר אם הוא ניצח את כל האנשים שקיבלו יותר נקודות ממנו והפסיד לכל האנשים שקיבלו פחות נקודות ממנו.
6. עבור אילו k יתכן שיש בדיוק k שחקנים מוזרים?
 7. מה האחוז המקסימלי של קשתות מוזרות בטורניר?
 8. א. האם קיים טורניר שהיו בו בדיוק שני משחקים שנגמרו בתיקו, כל שני שחקנים צברו כמות שונה של נקודות ויש שחקן מוזר?
ב. בטורניר היה רק תיקו אחד וכל שני שחקנים צברו כמות שונה של נקודות. הוכיחו כי לא היו שחקנים מוזרים.

אי פריקות

- טורניר יקרא פריק אם יש חלוקה של הקודקודים שלו לשתי קבוצות כך שכל קודקוד בקבוצה הראשונה ניצח כל קודקוד בקבוצה השנייה.
- טורניר יקרא קשיר חזק אם מכל קודקוד יש מסלול לכל קודקוד אחר.
1. הוכיחו כי טורניר הוא קשיר חזק אם ורק אם הוא אי-פריק.
 2. הוכיחו כי בכל טורניר אי-פריק כל קודקוד מוכל במעגל מאורך k לכל k בין 3 ל- n .
 3. הוכיחו כי בטורניר אי-פריק ישנם לפחות $n - 2$ משולשים.
 4. מה היא הכמות המינימלית של תתי טורנירים אי-פריקים מגודל k בתוך טורניר אי-פריק?
 5. מצאו את הכמות המינימלית האפשרית של מעגלים בטורניר אי-פריק.
 6. מצאו את הכמות המקסימלית של מעגלים באורך 4 בטורניר.
 7. מצאו את הכמות המקסימלית של תתי-טורנירים טרנזיטיביים מגודל k בטורניר אי-פריק מגודל n .

בניצחון!