משפט התלתן

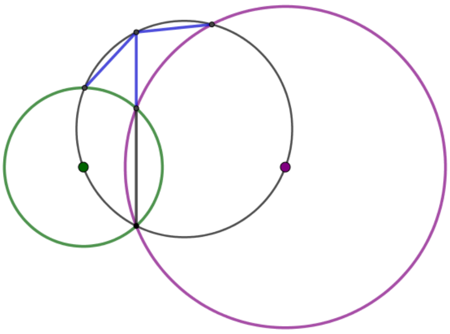
1. במשולש ABC על המשכי הצלעות AB, AC, מעבר ל-A, נבחרו נקודות D, E בהתאמה כך ש-$BD = CE = BC$. הוכיחו כי המעגלים ABE, ACD נחתכים על חוצה הזווית של $\angle BAC$.

2. יהי I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. תהי P נקודה בתוך המשולש המקיימת $\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$. הראו כי $AP \geq AI$, וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

3. במשולש ABC מרכז המעגל החסום הוא I ומרכזי המעגלים החסומים מבחוץ הם I_a, I_b, I_c. בטאו את $I_aI^2 + I_bI_c^2$ באמצעות R - הרדיוס של המעגל החוסם.

4. על הקטע BC נמצאת נקודה T. נקודה X נמצאת על האנך ל-BC בנקודה T, כך שהזווית $\sphericalangle BXC$ קהה. נקודות F ו-E הם השיקופים של T ביחס לישרים XB ו-XC. מרכז המעגל החוסם של BXC הוא O. הראו כי $\sphericalangle OFB = \sphericalangle OEC$.

5. BC הוא קוטר של מעגל שמרכזו O. A היא נקודה כלשהי על המעגל המקיימת $\sphericalangle AOC > 60^\circ$. המיתר EF הוא האנך האמצעי של AO. D היא אמצע הקשת AB (הקצרה). הישר דרך O שמקביל ל-AD פוגש את AC בנקודה J. הוכח כי J הוא מרכז המעגל החסום של CEF.



6. הוכיחו שהקטעים הכחולים בציור שווי אורך.

7. נתונים שני מעגלים, אחד בתוך השני. מנקודה C על המעגל החיצוני מעבירים משיקים למעגל הפנימי, שחותכים שנית את המעגל החיצוני בנקודות A ו-B. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכז המעגל החסום של משולש ABC (כשהנקודה C זזה על המעגל).

8. נקודות K ו-L נמצאות על הקשתות AB ו-BC של המעגל החוסם של ABC, כך ש-AC מקביל ל-KL. נסמן את מרכזי המעגלים החסומים של ABK ו-CBL באמצעות I ו-J. תהא N אמצע הקשת ABC. הראו כי NI שווה ל-NJ.

9. על הצלעות BC, AC, AB נבחרו נקודות D, E, F כך שמתקיים

$$AE - AF = BF - BD = CD - CE$$

נסמן ב-I_A, I_B, I_C את מרכזי המעגלים החסומים במשולשים AEF, BDF, CDE בהתאמה. הוכיחו כי שמרכז המעגל החוסם את המשולש $I_AI_BI_C$ מתלכד עם מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

10. טרפז ABCD ‏(AD||BC) חסום במעגל ω. המעגל החסום במשולש ABC משיק ל-BC בנקודה P והמעגל החסום במשולש ABD משיק ל-AD בנקודה Q. נסמן ב-X את אמצע הקשת BC שלא מכילה את A וב-Y את אמצע הקשת AD שלא מכילה את B. הוכיחו כי XP נחתך עם YQ על ω.

11. **פרק א:** משולש ABC חסום במעגל. יהיו P ו-Q אמצעי הקשתות מול A ו-B בהתאמה. הישר P, Q חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות U ו-V. יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הוכיחו כי CUIV מעוין.

פרק ב: נתון משולש ABC. קודקודיו מחלקים את המעגל החוסם ל-3 קשתות, ואמצעי הקשתות הללו יסומנו P, Q, R (של BC, AC, AB בהתאמה). הקטע PQ חותך הקטע BC ב-U ואת הקטע AC ב-V. הקטע QR חותך את הקטע AC ב-W ואת AB ב-X. הקטע PR חותך את הקטע AB ב-Y ואת הקטע BC ב-Z.

הוכיחו כי UX, VY, WZ נפגשים בנקודה אחת.

פרק ג: משולש ABC חסום במעגל S. אמצעי הקשתות AB, CA, BC הם P, Q, R בהתאמה. יהיו S_1, S_2, S_3 מעגלים שמרכזיהם P, Q, R בהתאמה ושמשיקים לישרים AB, CA, BC בהתאמה. הוכיחו שניתן לבחור משיק חיצוני משותף לכל זוג מעגלים מבין S_1, S_2, S_3 , כך ששלושת המשיקים יפגשו בנקודה אחת.