

טלסקופ

חשבו את הסכומים והמכפלות הבאות:

$$1. 0 < x < 1, \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2^i}) \quad 2. \sum_{i=1}^n i! \cdot (i^2 + i + 1) \quad 3. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{F_{i-1} \cdot F_{i+1}}$$

$$4. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \quad 5. n > 1, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+i}{i}} \quad 6. \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$7. \sum_{i=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{(2i+1)^2}\right) \quad 8. \prod_{i=1}^{44} (1 - \cot i^\circ)$$

9. הראו כי לכל $n > m$ שלמים חיוביים מתקיים ש-

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1})$$

10. חשבו את הממוצע של $2 \sin 2^\circ, 4 \sin 4^\circ, 6 \sin 6^\circ, \dots, 180 \sin 180^\circ$

11. מה גדול יותר

$$\frac{1^{-3} - 2^{-3}}{1^{-2} - 2^{-2}} - \frac{2^{-3} - 3^{-3}}{2^{-2} - 3^{-2}} + \frac{3^{-3} - 4^{-3}}{3^{-2} - 4^{-2}} - \dots + \frac{2019^{-3} - 2020^{-3}}{2019^{-2} - 2020^{-2}}$$

או

$$? 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{5781}$$

12. סדרה a_i מוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1, a_{i+1} = (i+1)(a_i + 1)$. חשבו את

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right)$$

13.* נתונות שתי סדרות a_n, b_n כך ש- $a_1 = b_1 = 1$ ולכל $n \geq 2$ מתקיים

ש- $b_n = b_{n-1}a_n - 2$. בנוסף ידוע ש- b_n חסומה. חשבו את

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

בהצלחה!