

תרגיל 7

1. מחלקים את כמספרים מ-1 עד 10 לשתי מחלקות, כך שמכפלת כל המספרים במחלקה ראשונה חלקי מכפלת כל המספרים במחלקה שנייה יהיה מספר שלם. מהו הערך המינימלי האפשרי של המנה?

2. הראו כי $n! = \prod_{i=1}^n \text{lcm}\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor\}$.

3. הראו כי $\prod_{k=1}^n (2^n - 2^k)$ מתחלק ב- $n!$.

4. מצאו את כל המספרים הטבעיים n שעבורם קיים a יחיד בתחום $0 < a \leq n!$ עבורו $a^n + 1$ מתחלק ב- $n!$.

5. הראו שהשאריות המתקבלות מהמספרים

$$\binom{2^n - 1}{1}, \binom{2^n - 1}{2}, \binom{2^n - 1}{3}, \dots, \binom{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}$$

כשמחלקים אותם ב- 2^n , כולן שונות.

6. נתון פולינום ממעלה 2 לפחות, שכל מקדמיו הם מספרים שלמים חיוביים. הראו שקיים m חיובי שלם, עבורו $P(m!)$ אינו ראשוני.