תרגיל 6

1. הוכיחו כי בכל משולש חד זוויות רדיוס המעגל החוסם קטן משני שליש מהתיכון.

פתרון: נסמן את מרכז המעגל החוסם של המשולש ב-O ואת מפגש התיכונים ב-M וללא הגבלת הכלליות נניח ש-O נמצא בתוך המשולש AMB ולכן $\mathrm{AO}+\mathrm{BO} \leq \mathrm{AM}+\mathrm{BM}$ נניח שהתיכון הארוך במשולש הוא התיכון של A ואורכו x ולכן $\mathrm{AM}+\mathrm{BM} \leq 2\mathrm{AM}=\frac{4x}{3}$ וסך הכל נקבל ש- $2\mathrm{AO} \leq \frac{4x}{3}$ וזה מה שרצינו.

2. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2 \dots A_n$ החסום במעגל שרדיוסו R. הוכיחו כי לכל נקודה במישור P מתקיים ש-

$$PA_1+PA_2+\ldots+PA_n \geq nR$$

פתרון: נסמן את מרכז המעגל החוסם ב- O ובכל קודקוד, A_i נעביר ישר המאונך ל- OA_i ונסמנו l_i. נשים לב כי PA_i גדול או שווה למרחק מ-P ל-l_i.

ה-l_i-ים יוצרים מצולע משוכלל גדול ואמרנו ש-$PA_1+PA_2+\ldots+PA_n$ קטן או שווה לסכום המרחקים של P לצלעות המצולע הגדול, אבל סכום המרחקים של P לצלעות פרופורציונאלי לשטח המצולע הגדול כיוון שאם נחבר את P לקודקודי המצולע הגדול נקבל הרבה משולשים מהצורה PA_iA_{i+1} ששטחם פרופורציונלי למרחק של P מ-A_iA_{i+1} וסכום השטחים האלו שווה לשטח המצולע הגדול. כלומר הוכחנו שסכום המרחקים מ-P לצלעות המצולע הגדול קבוע אבל אם נבחר את P להיות O אז נקבל שהוא שווה ל-nR וזה בדיוק מה שרצינו.

הערה: כמובן שכל המרחקים והשטחים שדיברנו עליהם מכוונים והכל עובד גם אם P מחוץ למצולע.

3. נתון מצולע קמור $A_1A_2 \dots A_n$ ונקודה P בתוכו כך שההיטלים של P על צלעות המצולע פוגעות בקטעים של הצלעות (בתוך הצלע ולא על המשך הצלע). נקודות $X_1, X_2, \dots X_n$ נבחרו על הקטעים $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ בהתאמה. הוכיחו כי קיים i עבורו $X_iX_{i+1} \geq P_iP_{i+1}$.

פתרון: נשים לב כי-

$$\sum \measuredangle X_iA_iX_{i+1} + \sum \measuredangle X_iPX_{i+1} = (n-2)\pi + 2\pi = n\pi$$

ולכן לפי שובך יונים קיים i עבורו $\measuredangle X_iA_iX_{i+1} + \measuredangle X_iPX_{i+1} \geq \pi$ כלומר P נמצאת בתוך המעגל $X_iA_iX_{i+1}$ או במילים אחרות A_iP קטן או שווה לקוטר של המעגל החוסם של $X_iA_iX_{i+1}$. נזכר גם ש-A_iP זה הוא קוטר של המעגל החוסם של $PP_iA_iP_{i+1}$.

כעט נשווה בין X_iX_{i+1} ל- P_iP_{i+1} בעזרת משפט הסינונים, הזוויות $\measuredangle X_iA_iX_{i+1}$ ו- $\measuredangle P_iA_iP_{i+1}$ שווה, זה אותה הזווית אבל כפי שכבר אמרנו הקוטר של $X_iA_iX_{i+1}$ גדול או שווה לקוטר של $P_iA_iP_{i+1}$ ולכן $X_iX_{i+1} \geq P_iP_{i+1}$.

4. נתון מצולע קמור P הסימטרי ביחס לנקודה O. הוכיחו כי קיימת מקבילית R המכילה את המצולע כך ש- $S_{\mathrm{R}} \leq \sqrt{2}S_{\mathrm{P}}$.

פתרון: נסמן ב-X' את הנקודה הסימטרית ל-X ביחס ל-O.

ננסה לבנות מקביליות שמכילות את המצולע. נבחר שני קודקודים של המצולע A, B ונבנה מקבילית בצורה הבאה: דרך A ו-A' נעביר ישרים מקבילים ל-BO, נסמן אותם a, a'. באופן דומה נעביר דרך B ו-B' ישרים מקבילים ל-AO ונסמן אותם b, b'.

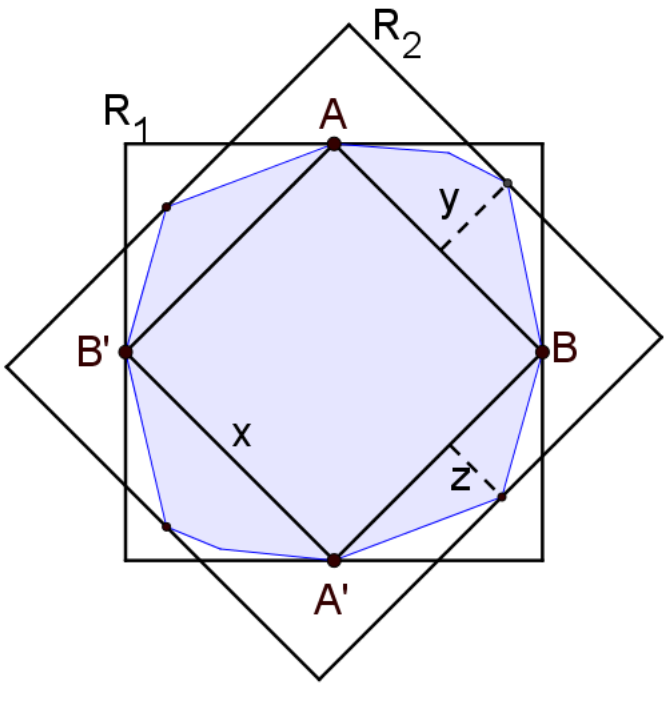
נחפש תנאי לכך שהמקבילית הזו תכיל את המצולע שלנו. נניח שהיא לא מכילה את המצולע, כלומר קיים קודקוד X של המצולע כך ש-X ו-O נמצאות בצדדים שונים של אחת מצלעות המקבילית, נניח a. נשים לב שזה אומר שהמרחק מ-X ל-BO גדול מהמרחק מ-A ל-BO ולכן אם נבקש שהשטח של המשולש ABO יהיה מקסימלי אז המקבילית שנקבל תכיל את המצולע שלנו.

מצאנו מקבילית שמכילה את המצולע שלנו הבעיה היא שהמצולע יכול ממש לשאוף למקבילית ולכן לא נצליח להוכיח את אי השוויון שלנו. בשביל לטפל בבעיה זו נמצא עוד מקבילית "מאונכת" למקבילית שלנו ואז נרצה להגיד שאי השוויון המבוקש מתקיים לאחת מהמקביליות.

המקבילית $ABA'B'$ "מאונכת" למקבילית הראשונה ולכן נבחר את המקבילית הקטנה ביותר בצלעותיה מקבילות לצלעות של $ABA'B'$.

את המקבילית הראשונה נסמן R_1 ואת השנייה R_2.

לשם נוחות נעשה העתקה אפינית שתעביר את R_1 לריבוע. נשים לב שלפני העתקה האפינית A, A', B, B' היו אמצעי הצלעות של R_1 (כי המרובע סימטרי ביחס ל-O) ולכן גם אחרי העתקה האפינית הן ישארו אמצעי הצלעות, כלומר גם $ABA'B'$ יהיה ריבוע עם אורך צלע קטנה פי $\sqrt{2}$ מאורך הצלע של R_1.



נסמן את הצלע של $ABA'B'$ ב-x ואת המרחקים מ-AB ו-$A'B$ לצלעות המתאימות של R_2 ב-y, z בהתאמה. בנוסף נשים לב שעל כל אחת מהצלעות של R_2 צריך להיות קודקוד של המצולע, אחרת הוא לא יהיה מינימלי. הקודקוד שעל הצלע המתאימה ל-AB אומר שלפחות $\frac{xy}{2}$ משטח

המצולע נמצא מחוץ ל-$ABA'B$, וכך לכל אחת מהצלעות ולכן שטח הצולע הוא לפחות $x^2+2\cdot\frac{xy}{2}+2\cdot\frac{xz}{2}=x(x+y+z)$.

המתרה שלנו עכשיו היא להוכיח שאחד משני הדברים מתקיימים: או ש- $S_{R_1}\le\sqrt{2}S_P$ או ש- $S_{R_2}\le\sqrt{2}S_P$.

נוכיח ש- $S_{R_1}\cdot S_{R_2}\le 2S_P^2$. כפי שכבר אמרנו $S_P\ge x(x+y+z)$ וברור ש- $S_{R_1}=2x^2$ ו- $S_{R_2}=(x+2y)(x+2z)$ כלומר אנו רוצים להוכיח ש- $2x^2(x+2y)(x+2z)\le 2x^2(x+y+z)^2$

ולאחר צמצום ש- $(x+2y)(x+2z)\le(x+y+z)^2$

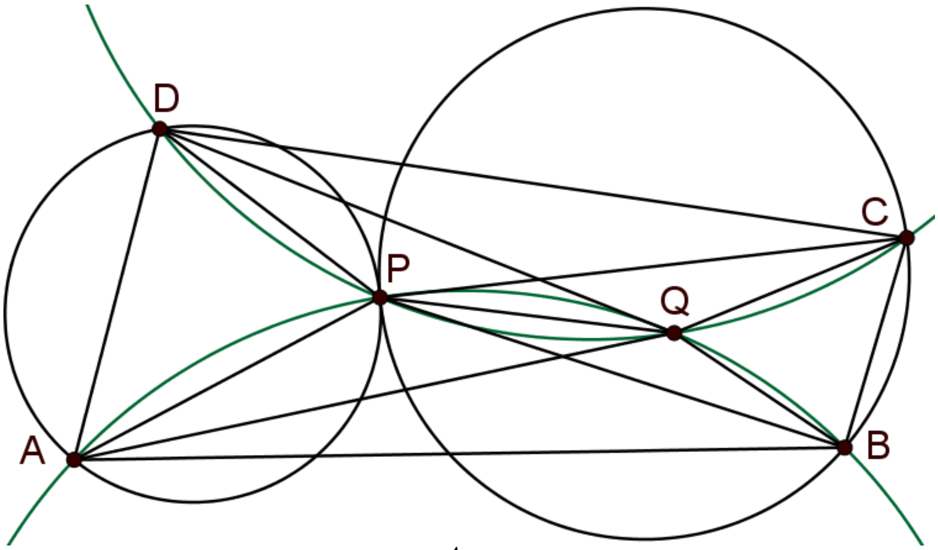
אבל זה ברור מאי שוויון הממוצעים. ניצחון.

5. נתון מרובע קמור $ABCD$. מעגל העובר בנקודות A,D ומעגל העובר בנקודות B,C משיקים באופן חיצוני בנקודה P הנמצאת בתוך המרובע.

נתון כי $\measuredangle PBA+\measuredangle PCD\le 90^o$ ובנוסף $\measuredangle PAB+\measuredangle PDC\le 90^o$.

הוכיחו כי $AB+CD\ge BC+AD$.

פתרון: התנאי $\measuredangle PBA+\measuredangle PCD\le 90^o$ אומר שסכום הקשתות AP ו-CD קטן או שווה ל-90^o, כלומר אם נסתכל על נקודת החיתוך השנייה של שני המעגלים APB, CPD ונסמנה Q אז $\measuredangle AQD$ חדה וכמובן שבאותה צורה אפשר להגיד שגם הזווית $\measuredangle BQC$ חדה.



אחרי שהבנו מה נתון נחשוב על מה רוצים שנוכיח. מבקשים שנוכיח ש-$AB + CD \geq BC + AD$, ה אסטרטגיה שלנו תהיה להסתכל על שני מעגלים עם קטרים BC, AD ולהגיד שהם לא נחתכים, וזה יסיים כי אז מצד אחד המרחק בין המרכזים של המעגלים גדול מסכום הרדיוסים שזה $\frac{BC+AD}{2}$ ומצד שני המרחק בין המרכזים שלהם, שהם כמובן אמצעי BC, AD, שווה לממוצע של האורכים של AB ו-CD ואז נקבל

ש- $AB + CD \geq BC + AD$, כפי שרצינו.

אז המתרה שלנו זה להוכיח ששני המעגלים לא נחתכים. נזכר שוב במה שהבנו מהנתון, זה שהזוויות $\measuredangle AQD, \measuredangle BQC$ חדות אומר ש-Q נמצאת מחוץ לשני המעגלים ולכן נרצה להגיד שהיא נמצאת "באמצע" בין שני המעגלים.

רוצים להוכיח ש-Q באמצע אז בהתחלה נוכיח שהיא נמצא בתוך המרובע. הנקודה A נמצאת מחוץ למעגל BCP ולכן הנקודה C נמצאת מחוץ למעגל ABP ובאותה צורה גם D נמצאת מחוץ ל-ABP ולפי כך P, Q נמצאת על הקשת AB של ABP ובדיוק באותו אופן P, Q נמצאות על הקשת CD של PCD. נסיק מכך שהנקודה Q נמצאת בתוך אחת מהזוויות $\measuredangle APD$ או $\measuredangle BPC$, נניח ללא הגבלת הכלליות שב- $\measuredangle BPC$. בנוסף הזוויות $\measuredangle BAP$ ו- $\measuredangle CDP$ חדות ולכן הזויות $\measuredangle BQP$ ו- $\measuredangle CQP$ קהות ולכן Q נמצאת לא רק בזוויות $\measuredangle BPC$ אלה ממש בתוך המשולש BPC ולכן בפרט גם במרובע.

נזכר שהיה לנו עוד נתון שעוד לא השתמשנו בו וזה ש-P זו נקודת ההשקה של המעגלים APD ו-BPC. P ו-Q הן נקודות חיתוך של זוג מעגלים כלשהם ולכן מבחינה אידיאולוגית הן צריכות לקיים אותם

תנאים (למרות שלא ברור מניסוח השאלה האם הן סימטריות או לא) ולכן ננסה להוכיח שגם המעגלים AQD ו-BQC משיקים ב-Q.

מכך ש-P זו נקודת ההשקה אנו יודעים ש- $\measuredangle APB = \measuredangle BCP + \measuredangle ADP$

נעשה חשבון:

$$\measuredangle AQB = \measuredangle APB = \measuredangle ADP + \measuredangle BCP = \measuredangle ADP + \measuredangle PDQ +$$
$$+\measuredangle BCP - \measuredangle PDQ = \measuredangle ADQ + \measuredangle BCP - \measuredangle PCQ = \measuredangle ADQ + \measuredangle QCB$$

ולכן המעגלים BQC ו-AQD באמת משיקים ב-Q.

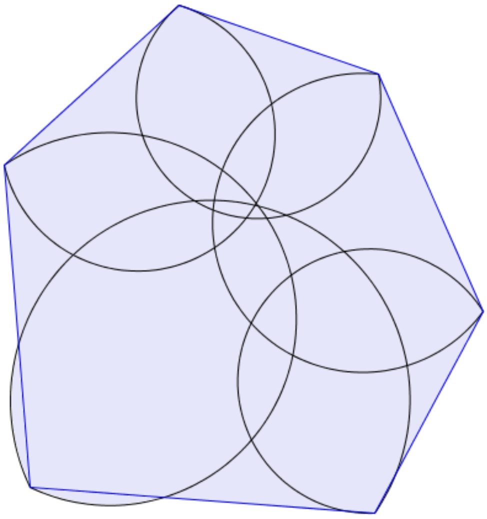
רצינו להוכיח שהמעגלים עם קטרים AD ו-BC לא נחתכים ומצד אחד הוכחנו שהנקודה Q נמצאת מחוץ לשניהם ומצד שני שהמעגלים BCQ ו-ADQ משיקים וזה בדיוק מוכיח ששני המעגלים לא יכולים להיחתך גפי שרצינו.

<u>הערה:</u> שימו לב שבהוכחה ש-Q זו נקודת ההשקה השתמשנו בכך שהיא נמצאת בתוך המרובע, אולי אם הינו עושים חשבון עם זוויות מכוונות אז הינו להוכיח Q זו נקודת ההשקה בלי להוכיח שהיא בתוך המרובע ואז לדלג על החלק הזה אבל צריך להיזהר בחשבון הזוויות המכוונות ובכל מקרה להוכיח ש-Q בתוך המרובע תורם להבנת הציור.

6. נתון משושה קמור B שזוויותיו $\beta_1, \dots, \beta_6$ וקודקודיו $B_1, \dots, B_6$. נבחרה בתוכו נקודה O וסומן $OB_i = a_i$. בנוסף נתון משושה קמור A שצלעותיו $a_1, \dots, a_6$ והזווית בין a_i ל- a_{i+1} שווה $\measuredangle B_iOB_{i+1} + 60^o$. הוכיחו כי

$$3S_A - 2S_B \leq \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sum_{i=1}^{6} a_i^2 - \sum_{i=1}^{6} a_i^2\beta_i$$

פתרון: בשאלה מסוג זה ברור כי מחבר השאלה חשב על איזשהו ציור אך לא סיפר לנו מה הוא, המתרה שלנו היא לנסות לקשר חלקים מהנוסחה לציורים, אנחנו נתאר ישר את הציור ובמהלך הפתרון יהיה אפשר להבין איך אפשר לחשוב על הציור הזה.

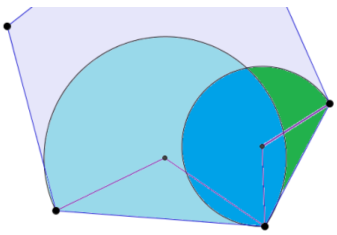


עבור כל משושה קמור לכל נקודה בתוך המשושה קיימת צלע שהנקודה רואה שזווית שגדולה שווה ל-60^o. כלומר אם על כל צלע נבנה כלפי פנים **מקטע** (צורה שנמצאת בין הצלע לקשת), כאשר הגודל הזוויתי של הקשת הוא 240^o, המקטעים האלה יכסו לחלוטין את המשושה.

נחשב את השטח של המקטע שנבנה על צלע באורך a. נחבר את מרכז המקטע לקודקודי הצלע, בכך נחלק את המקטע לשני חלקים אחד מהם זה שני שליש מהמעגל והשני זה משולש שצלעותיו הן R, R, a וזווית הראש שווה 120^o ולכן $a^2 = 3R^2$ כלומר השטח של הקטע שווה

$$\frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{2\pi R^2}{3} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} + \frac{2\pi a^2}{9}$$

וכפי שאמרו סכום השטחים של כל הקטעים גדול או שווה משטח המצולע , כלומר $(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9})(a_1^2 + \dots a_6^2)$ $\geq S$.



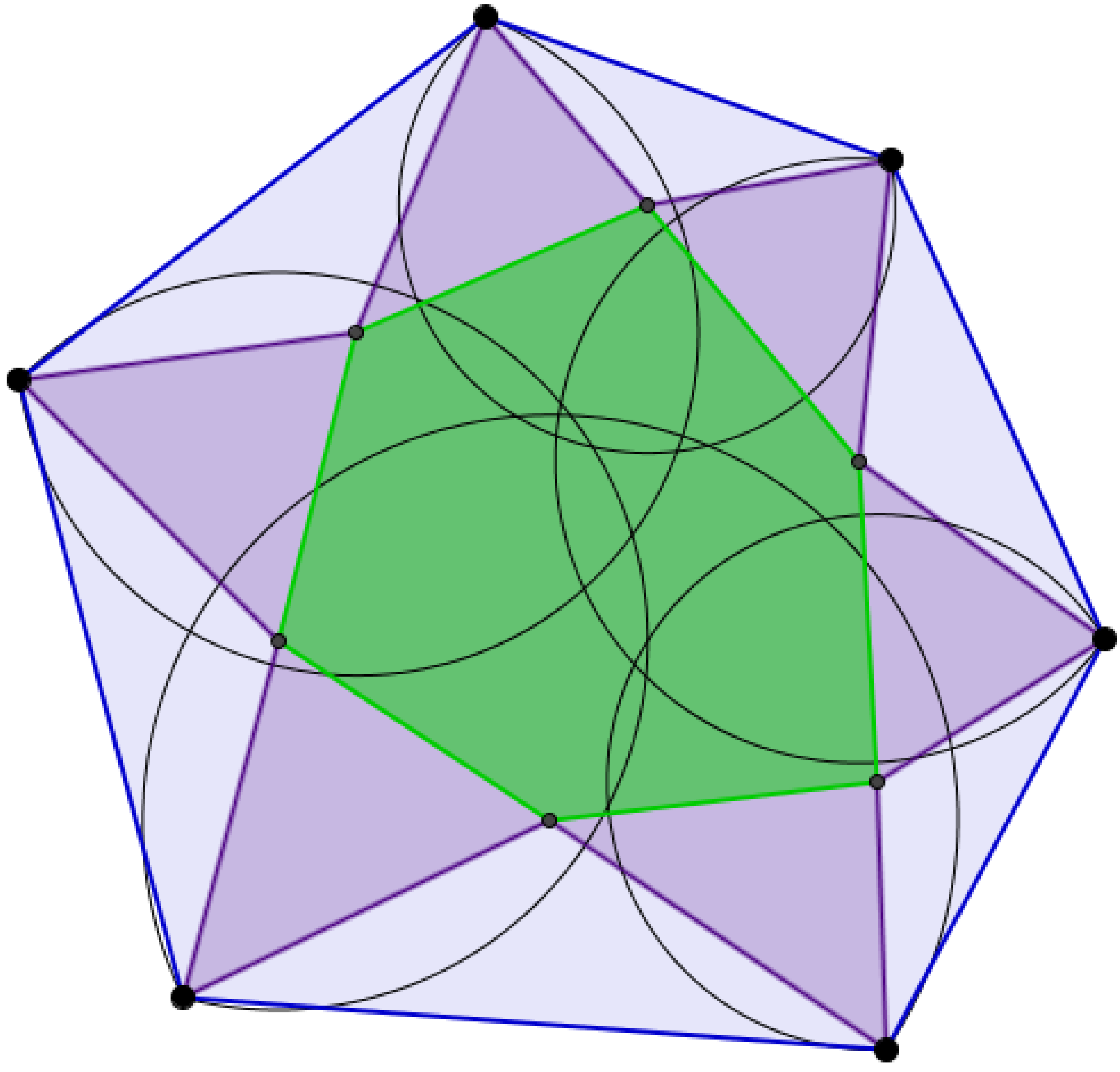
כמובן, זה אי-שוויון לא הדוק: אנחנו בכלל לא מתחשבים בחיתוך כפול.

לכל שני מקטעים שנבנו על צלעות סמוכות יש "סירה" משותפת ולכן אפשר להוריד מאגף ימין של אי השוויון שקיבלנו את סכום שטחי הסירות, שימו לב שיתכן שחלק מהסירה נמצא מחוץ למצולע אבל גם אז צריך להוריד אותו כי לא רצינו לספור אותו וספרנו אותו פעם אחת.

שטח הסירה שנמצאת בחיתוך המקטעים הבנויים על הצלעות a ו- b הוא שטח החיתוך של שני עיגולים שרדיוסיהם $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ו- $R = \frac{b}{\sqrt{3}}$ והמרחק בין המרכזים שלהם הוא d, כאשר d זה אורך הצלע השלישית במשולש ששתי הצלעות האחרות שלו הן R ו- r והזוויות ביניהן היא $\varphi - 60^o$ כאשר φ היא הזווית של המשושה בין הצלעות a ו- b.

המשושה שצלעותיו $a_1, \dots, a_6$ שניסינו להעריך את שטחו יקרא A.

נסמן ב- $O_1, \dots, O_6$ את המרכזים של המקטעים. נגיד שקודקוד A_i של המשושה נמצא על המעגלים שמרכזיהם O_i ו- O_{i+1}. את שטח הסירה אפשר לבטא כסכום השטחים של שתי גזרות, אחת עם מרכז O_i והשנייה עם מרכז ב- O_{i+1}, פחות שטח דלתון. קצה אחד של הקשתות בכל אחת משתי הגזרות הוא A_i, והקצה האחר הוא נקודה C_i הסימטרית ל- A_i ביחס ל- O_iO_{i+1} וקודקודי הדלתון הם A_i, O_i, C_i ו- O_{i+1}.
כמובן אפשרי להגיע לביטוי מפורש, אבל אנחנו נגרום לחלק מהביטויים להיות חלק מהתמונה.



ניקח את המשולשים הסגולים בציור, ונצמיד אותם אחד לשני על מנת ליצור משושה חדש, שנקרא לו B'.

בתוך משושה זה תהיה נקודה O שבה נצמיד את כל הקודקודים של המשולשים סגולים, שקודם היו בקודקודים של A. הזוויות של המשולשים הסגולים שהיו סמוכות לקודקודי A יסומנו β_i, והזוויות של A יהיו $\beta_i + 60^o$. אז מנוסחת סכום הזוויות במשושה קל לראות כי $\beta_1 + \ldots + \beta_6 = 360^o$ כלומר לאחר הזזה המשולשים הסגולים יצרו זווית של 360^o מסביב ל-O.
המרחקים מ-O לקודקודי המשושה B' הם $R_i = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$.

על מנת לחשב את השטח הכפול (מה שקראנו לו סירות) צריך לחבר את שטחי הגזרות ולהחסיר את שטחי הדלתונים. הדלתונים הם בדיוק פעמיים המשולשים הסגולים שמרכיבים את B', כלומר סכום שטחי הדלתונים הוא $2S_{B'}$. שטח של גזרה עם רדיוס R וזווית α הוא $\frac{1}{2}\alpha R^2$.
במקרה שלנו, הזווית היא פעמיים הזווית בין הצלע הסגולה לצלע הירוקה, אז פעמיים מתקזז עם החצי של הנוסחה, ונשאר סכום ביטויים מהסוג αR^2. בסכום כל רדיוס מופיע פעמיים, וסכום הזוויות שמופיעות לצידו זה בדיוק הזוויות של המשושה B'. לכן השטח הכולל של הגזרות שצריך לחבר הוא $\sum_{i=1}^{6} R_i^2 \beta_i$., צריך להחסיר דלתונים ואז נקבל

$$\sum_{i=1}^{6} R_i^2 \beta_i - 2S_{B'}$$

זה הביטוי לחיתוכים הכפולים שניתן להחסיר מהאגף הימני של אי-השוויון שכבר כתבנו, סך הכל נקבל

$$S_A \le \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}\right) \sum_{i=1}^{6} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} R_i^2 \beta_i - 2S_{B'}\right)$$

בגדול זו התוצאה שביקשו להוכיח, אבל אנו עוד נסרק אותה על מנת לקבל ביטוי יותר נקי. ההגדרה של המשושה B' היא מסורבלת: יש שם קטעים באורך $R_i = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$. נגדיל את המשושה B' פי $\sqrt{3}$ על מנת לקבל משושה B ששטחו גדול פי 3 ומוגדר באופן פשוט יותר, ולהוציא את R_i מהתשובה. נקבל

$$S_A \le \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}\right) \sum_{i=1}^{6} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{3} a_i^2 \beta_i - \frac{2}{3} S_{B'}\right)$$

בנוסחה זו יש הרבה פעמים שליש, לכן נכפול ב-3, ונאסוף את שטחי המשושים באגף שמאל:

$$3S_A - 2S_B \le \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\sum_{i=1}^{6} a_i^2 - \sum_{i=1}^{6} a_i^2\beta_i$$

וזה מש"ל.