

תרגיל 6

1. הוכיחו כי בכל משולש חד זוויות רדיוס המעגל החוסם קטן משני שליש מהתיכון.

2. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2 \dots A_n$ החסום במעגל שרדיוסו R . הוכיחו כי לכל נקודה במישור P מתקיים ש-

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n \geq nR$$

3. נתון מצולע קמור $A_1A_2 \dots A_n$ ונקודה P בתוכו כך שההיטלים של P על צלעות המצולע פוגעות בקטעים של הצלעות (בתוך הצלע ולא על המשך הצלע). נקודות X_1, X_2, \dots, X_n נבחרו על הקטעים $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ בהתאמה. הוכיחו כי קיים i עבורו $X_iX_{i+1} \geq P_iP_{i+1}$.

4. נתון מצולע קמור P הסימטרי ביחס לנקודה O . הוכיחו כי קיימת מקבילית R המכילה את המצולע כך ש- $S_R \leq \sqrt{2}S_P$.

5. נתון מרובע קמור $ABCD$. מעגל העובר בנקודות A, D ומעגל העובר בנקודות B, C משיקים באופן חיצוני בנקודה P הנמצאת בתוך המרובע.

נתון כי $\angle PBA + \angle PCD \leq 90^\circ$ ובנוסף $\angle PAB + \angle PDC \leq 90^\circ$.

הוכיחו כי $AB + CD \geq BC + AD$.

6. נתון משושה קמור B שזוויותיו β_1, \dots, β_6 וקודקודיו B_1, \dots, B_6 . נבחרה בתוכו נקודה O וסומן $OB_i = a_i$. בנוסף נתון משושה קמור A שצלעותיו a_1, \dots, a_6 והזווית בין a_i ל- a_{i+1} שווה $\angle B_iOB_{i+1} + 60^\circ$. הוכיחו כי

$$3S_A - 2S_B \leq \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \sum_{i=1}^6 a_i^2 - \sum_{i=1}^6 a_i^2 \beta_i$$