פתרון תרגיל 5

1. $f:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+,\ f(n) + 2f\big(f(n)\big) + 3f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = 6n$

תשובה. $f(n) = n$ לכל n.

פתרון. מהנתון רואים ש-f חח"ע: נניח כי $f(m) = f(n)$, ונסיק כי $f\big(f(m)\big) = f\big(f(n)\big)$ וגם $f\Big(f\big(f(m)\big)\Big) = f\big(f\big(f(n)\big)\big)$. נציב זאת במשוואה ונקבל:

$$6n = f(n) + 2f\big(f(n)\big) + 3f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = f(m) + 2f\big(f(m)\big) + 3f\Big(f\big(f(m)\big)\Big) = 6m$$

ולכן $m = n$. כעת נוכיח באינדוקציה על n ש-$f(n) = n$. אם $n = 1$, אז מתקיים

$$6 = f(1) + 2f\big(f(1)\big) + 3f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)$$

ומכיוון ש-$f(1), f\big(f(1)\big), f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)$ שלמים חיוביים, נובע ששלושתם שווים 1 (אחרת אגף ימין יהיה גדול מדי), בפרט $f(1) = 1$.

נניח ש-$f(k) = k$ לכל $1 \le k \le n-1$, ונוכיח ל-n.

טענה. לכל $m \ge n$ מתקיים $f(m) \ge n$.

הוכחה. אחרת $f(m) = k$ כאשר $1 \le k \le n-1$. לפי הנחת האינדוקציה, $f(k) = k = f(m)$, ובגלל ש-f חח"ע מתקיים $m = k \le n-1$ בניגוד להנחתנו.

בפרט, $f(n) \ge n$, לכן $f\big(f(n)\big) \ge n$ ולכן $f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) \ge n$ (שימוש בטענה שלוש פעמים ברצף). נציב במשוואה ונקבל:

$$6n = f(n) + 2f\big(f(n)\big) + 3f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) \ge n + 2n + 3n = 6n$$

קיבלנו שוויון בין שני האגפים, ולכן כל האי-שוויונות שלנו היום למעשה שוויונות – בפרט, $f(n) = n$ כדרוש.

סיימנו את הוכחת האינדוקציה. צריך להציב $f(n) = n$ במשוואה ולבדוק שזה אכן פתרון, אך זה קל.

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\big(f(x) + y\big) = f(x^2 - y) + 4f(x) \cdot y$

תשובה. $f(x) = x^2$ לכל x, או $f(x) = 0$ לכל x.

פתרון. נרצה לבטל את הגורמים $f\big(f(x) + y\big), f(x^2 - y)$ זה עם זה באמצעות הצבה נבונה של y. לשם כך נציב $y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$ במשוואה:

$$f\left(\frac{x^2+f(x)}{2}\right)=f\left(\frac{x^2+f(x)}{2}\right)+4f(x)\cdot\left(\frac{x^2-f(x)}{2}\right)$$

$$f(x)\cdot\left(x^2-f(x)\right)=0$$

כלומר, לכל x ממשי מתקיים $f(x)=0$ או שמתקיים $f(x)=x^2$. נרצה להראות שאחת האפשרויות נכונה לכל ה-x-ים ביחד. נניח בשלילה שקיימים $a,b\neq 0$ כך ש- $f(a)=0, f(b)=b^2$. נציב $x=a, y=b$ במשוואה:

$$b^2=f(b)=f(f(a)+b)=f(a^2-b)+4f(a)b=f(a^2-b)$$

בפרט $f(a^2-b)\neq 0$ (כי $b^2\neq 0$). אך נזכור כי האפשרויות ל-$f(a^2-b)$ הן 0 או $(a^2-b)^2$, ואת הראשונה שללנו. לכן $f(a^2-b)=(a^2=b)^2$. נציב זאת למעלה:

$$b^2=(a^2-b)^2=a^4-2a^2b+b^2\Longrightarrow a^4=2a^2b$$

מהשוויון הזה נסיק כי $a^2=2b$. כלומר, יש לכל היותר ערך אחד אפשרי של b (עבורו $f(b)=0$): אם היו שני ערכים $b\neq b'$, היינו מקבלים $b=\frac{a^2}{2}=b'$ וסתירה. מטיעון דומה, יש גם לכל היותר שני ערכים אפשריים של a (עבורם $f(a)=a^2$). אך כל המספרים הממשיים שייכים לאחת משתי הקטגוריות האלה, והראנו עכשיו ששתיהן סופיות. זו סתירה, ולכן הנחתנו הייתה שגויה – כלומר, $f(x)=x^2$ לכל x, או $f(x)=0$ לכל x. נציב כדי לבדוק ששתי הפונקציות האלה הן פתרונות חוקיים:

$$f(x)=0:\quad 0=0+4\cdot 0\cdot y$$

$$f(x)=x^2:\quad (x^2+y)^2=(x^2-y)^2+4x^2y$$

ואכן בשני המקרים יש זהות נכונה (אפשר לבדוק ע"י פתיחת סוגריים).

3. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\quad f(x)^2\geq (f(x)+y)\cdot f(x+y)$

תשובה. אין פונקציה כזו.

פתרון. האסטרטגיה הכללית בשאלות מסוג זה היא להוכיח ש-$f(y)<0$ עבור $y>0$ כלשהו, ולהגיע לסתירה (מכך שהפונקציה מקבלת ערכים רק ב-$\mathbb{R}^+$). מספיק להוכיח שקיים קבוע $c>0$ המקיים $f(x)-f(x+1)\geq c$ לכל x: אכן, באינדוקציה נקבל $f(x)-f(x+n)\geq cn$ עבור n שלם חיובי, ועבור n גדול מספיק נקבל

$$f(1+n)\leq f(1)-cn<0$$

לכן מטרתנו תהיה להוכיח אי שוויון $f(x)-f(x+1)\geq c$, עם קבוע שנגלה בהמשך.

נוסיף $yf(x)$ לשני האגפים באי-השוויון הנתון:

$$f(x)^2+yf(x)\geq (f(x)+y)\cdot f(x+y)+yf(x)$$

נחלק ב-$(f(x)+y)$ את שני האגפים:

$$f(x) \geq f(x+y) + \frac{yf(x)}{f(x)+y} \Longrightarrow f(x) - f(x+y) \geq \frac{yf(x)}{f(x)+y} \quad (*)$$

מאי-השוויון הזה אנו מקבלים ש-f יורדת (אגף ימין הוא חיובי).

כעת, נקבע x כלשהו. משום ש-$f(x+1) > 0$, קיים שלם חיובי n המקיים $f(x+1) \geq \frac{1}{n}$. מכיוון ש-f פונקציה יורדת, מתקיים גם $f\left(x+\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n}$ לכל $0 \leq k \leq n$. נציב $\left(x+\frac{k}{n}, \frac{1}{n}\right)$ במקום (x,y) באי-שוויון $(*)$:

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{\frac{1}{n} f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} = \frac{X}{nX+1}$$

כאשר $X = f\left(x+\frac{k}{n}\right)$. הפונקציה $\frac{X}{nX-1}$ היא עולה כתלות ב-X, ולכן $X \geq \frac{1}{n}$ גורר $\frac{X}{nX-1} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+1} = \frac{1}{2n}$. סה"כ נקבל:

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n}$$

כאשר נסכום את אי-השוויון הזה על פני $k = 0,1,2,\dots,n-1$, נקבל באגף ימין $\frac{1}{2}$, ובאגף שמאל נקבל טור טלסקופי:

$$f(x) - f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \cdots - f(x+1) = f(x) - f(x+1)$$

לכן בסה"כ נקבל $f(x) - f(x+1) \geq \frac{1}{2}$, וכאמור זה מספיק כדי להגיע לסתירה לקיומה של f כזו.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x) \cdot f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$

תשובה. $f(x) = 0$ לכל x, $f(x) = 2$ לכל x, או $f(x) = x$ לכל x.

פתרון. נניח ראשית ש-$f(x) = c$ קבועה, ונקבל:

$$c + c^2 = c + 2c \Longrightarrow c = 0,2$$

וקל לראות שעבור $c = 0$ או $c = 2$, אכן מקבלים פתרון של המשוואה.

מעתה נניח שf אינה קבועה. נציב $y = 0$:

$$f(x) + f(x)f(0) = 2f(0) + f(x) \Longrightarrow f(x)f(0) = 2f(0)$$

מכך נסיק ש-$f(0) = 0$, שכן אחרת f קבועה, ובמקרה זה טיפלנו כבר.

נסמן $f(1) = c$. נציב $x = y = 1$:

$$f(2) + f(1)^2 = f(1) + f(1) + f(1) \Longrightarrow f(2) = 3c - c^2$$

נציב $x = y = 2$:

$$f(4) + f(2)^2 = f(4) + 2f(2) \Longrightarrow f(2) = 0,2 = 3c - c^2$$

אם נפתור את שתי המשוואות הריבועיות שהתקבלו, נקבל שהערכים האפשריים עבור c הם 0,1,2,3. כמו כן, אם נציב $y = 1$ במשוואה נקבל:

$$f(x+1) + f(x)f(1) = 2f(x) + f(1) \Longrightarrow f(x+1) = (2-c)f(x) + c$$

נחלק למקרים לפי ערכו של c:

<u>**$c = 0$:**</u> נקבל $f(x+1) = 2f(x)$. באינדוקציה, $f(x+n) = 2^n f(x)$ לכל n שלם. בפרט, מ- $f(0) = 0$ מסיקים ש-$f(n) = 0$ לכל n שלם. כעת אם נציב $y = n$ שלם במשוואה, נקבל:

$$f(x+n) + f(n)f(x) = f(nx) + f(x) + f(n)$$

$$\Longrightarrow (2^n - 1)f(x) = f(nx)$$

בפרט, על ידי הצבה של $n = 2, n = 4$ נקבל

$$3f(x) = f(2x), \;\; 3f(2x) = f(4x), \;\; 15f(x) = f(4x)$$

כלומר $9f(x) = 15f(x)$ לכל x, ולכן $f(x) = 0$ קבועה – ובמקרה כזה כבר טיפלנו.

<u>**$c = 2$:**</u> נקבל $f(x+1) = 2$, ולכן f קבועה – ובמקרה זה כבר טיפלנו.

<u>**$c = 3$:**</u> נקבל $f(x+1) = 3 - f(x)$. נפעיל זאת פעמיים, ונקבל $f(x+2) = 3 - f(x+1) = f(x)$ לכל x. בפרט, $f(2) = f(0) = 0$ וגם $f\left(2\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. אך אם נציב $x = 2, y = \frac{1}{2}$ במשוואה המקורית, נקבל:

$$f\left(2\frac{1}{2}\right) + f(2) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

אם נציב את הערכים הידועים לנו, נקבל $f\left(2\frac{1}{2}\right) = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right)$, בסתירה לכך ש-$f\left(2\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. לכן אופציה זו לא תיתכן.

<u>**$c = 1$:**</u> נקבל $f(x+1) = f(x) + 1$. נציב במשוואה המקורית $(x, y+1)$ ונקבל:

$$f(x+y+1) + f(x)f(y+1) = f(xy+x) + f(x) + f(y+1)$$

$$\Longrightarrow f(x+y) + f(x)f(y) + f(x) + 1 = f(xy+x) + f(x) + f(y) + 1$$

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy+x) + f(y)$$

נשים לב שאגף ימין הוא פשוט אגף ימין של המשוואה המקורית, ולפיה שווה ל-$f(xy) + f(x) + f(y)$. לכן:

$$f(xy+x) + f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) \Longrightarrow f(xy+x) = f(xy) + f(x)$$

אם נציב $y = \frac{z}{x}$, נקבל $f(x+z) = f(x) + f(z)$ לכל x, z. נציב זאת במשוואה המקורית:

$$f(x+z)+f(x)\cdot f(z)=f(x+z)+f(x\cdot z)$$

כלומר גם $f(x\cdot z)=f(x)\cdot f(z)$. אז f גם "חיבורית" וגם "כפלית". זו מערכת פונקציונלית מוכרת. נראה כיצד פותרים אותה.

ראשית, מכפליות f מעבירה מספרים אי-שליליים למספרים אי-שליליים: לכל $y\geq 0$, מתקיים

$$f(y)=f\left(\sqrt{y}^2\right)=\left[f\left(\sqrt{y}\right)\right]^2\geq 0$$

בנוסף, מחיבוריות מתקיים לכל שלם חיובי n

$$f(nx)=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=nf(x)$$

משום ש- $f(1)=c=1$, נובע $f(n)=nf(1)=1$ לכל n וגם $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n}=\frac{m}{n}$ לכל רציונלי $\frac{m}{n}$.

הוכחנו ש-$f(x)=x$ לכל x רציונלי, נותר להראות זאת לכל x ממשי. נניח בשלילה ש-$f(x)\neq x$ עבור x כלשהו. בה"כ, $f(x)<x$ (ההוכחה למקרה השני דומה). אז קיים מספר רציונלי q המקיים $f(x)<q<x$. נקבל מחיבוריות:

$$q>f(x)=f(x-q)+f(q)=f(x-q)+q\geq q$$

(המעבר האחרון נובע מכך ש-$x-q\geq 0 \Longleftarrow f(x-q)\geq 0$) וסתירה. לכן $f(x)=x$ לכל x ממשי.

לסיכום, הפתרונות הם $f(x)=0$, $f(x)=2$, $f(x)=x$. קל להציב ולוודא ששלושתם אכן פתרונות למשוואה.

5. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x\cdot f(y-x))=f\left(y\cdot f(x)\right)-x^2$

תשובה. $f(x)=x$ לכל x, או $f(x)=-x$ לכל x.

פתרון. ראשית נבחין ש-f אינה קבועה: אכן, אם נניח $f(x)=c$ לכל x, אז $c=c-x^2$ לכל x, וזה כמובן לא יתכן.

כעת נסמן $f(0)=a$. נציב $x=0$ ונקבל

$$f(0)=f\left(yf(0)\right)\Longrightarrow a=f(ay)$$

נניח בשלילה ש- $a\neq 0$. אז ay יכול להיות כל מספר ממשי שנרצה, כלומר $f(z)=a$ קבועה, והראנו שזה לא נכון. לכן $a=0$ בהכרח.

כעת נראה ש-f היא על: נציב $x=y$ במשוואה המקורית:

$$0=f(0)=f\left(xf(0)\right)=f\left(xf(x)\right)-x^2\Longrightarrow f\left(xf(x)\right)=x^2$$

נציב $y=0$ במשוואה המקורית:

$$f\left(xf(-x)\right)=f\left(0f(x)\right)-x^2=-x^2$$

משתי המשוואות האחרונות נסיק ש- f יכולה להחזיר כל מספר ממשי, שכן כל מספר אי-שלילי הוא מהצורה x^2, וכל מספר שלילי הוא מהצורה $-x^2$.

טענה. לכל m ממשי, קיים ויחיד z ממשי כך ש-$f(z) = m^2$.

הוכחה. הקיום נובע מהעובדה ש- f היא על, נראה יחידות של z. נניח ראשית ש- $m = 0$. יהי z המקיים $f(z) = 0$. נראה שבהכרח $z = 0$: אכן, נציב $x = z$ זה במשוואה המקורית:

$$f\big(zf(y-z)\big) = f\big(yf(z)\big) - z^2 = -z^2$$

המספר $y - z$ יכול לקבל כל ערך ממשי. מכיוון ש- f על, גם $f(y-z)$ יכול לקבל כל ערך ממשי. לכן לכל t, מתקיים $f(zt) = -a^2$. אם נניח בשלילה ש-$z \neq 0$, אז zt יכול לקבל כל ערך ממשי, ולכן f קבועה – אבל הוכחנו שזה לא נכון. לכן $z = 0$ בהכרח.

כעת נוכיח זאת עבור $m \neq 0$ כללי. יהי z המקיים $f(z) = m^2$. נציב $x = m, y = \frac{z}{f(m)}$ במשוואה המקורית:

$$f\big(mf(y-m)\big) = f\big(yf(m)\big) - m^2 = f(z) - m^2 = 0$$

לפי המקרה הקודם שהוכחנו, $mf(y-m) = 0$. אבל הנחנו $m \neq 0$, לכן $f(y-m) = 0$. שוב לפי המקרה הקודם, נובע ש- $y - m = 0$, כלומר $\frac{z}{f(m)} = m$. לכן $z = mf(m)$ נקבע ביחידות על פי m, ובפרט הוא יחיד. מש"ל.

כעת נשתמש בטענה כדי להראות ש- f אי-זוגית: ראינו קודם ש-$f\big(xf(x)\big) = x^2$. אם נשנה סימן ל-x, נקבל

$$f\big(-xf(-x)\big) = (-x)^2 = x^2 = f\big(xf(x)\big)$$

לפי הטענה, $xf(x) = -xf(-x)$. אם $x \neq 0$ אז ניתן לחלק בו ולקבל $f(x) = -f(-x)$. אם $x = 0$ אז הפסוק הזה גם נכון, כי שני האגפים שווים 0. בכל אופן קיבלנו ש- f אי-זוגית.

בפרט נובע ש- f חח"ע: הטענה אומרת ש- f חח"ע על מספרים אי-שליליים, ומהאי-זוגיות נובע שהיא חח"ע גם על מספרים שליליים.

כעת, יהיו x, y כלשהם. נבצע שלוש הצבות במשוואה המקורית. עבור (x, y) מקבלים:

$$f\big(xf(y-x)\big) = f\big(yf(x)\big) - x^2$$

עבור $(y, y-x)$ מקבלים:

$$f\big(yf(-x)\big) = f\big((y-x)f(y)\big) - y^2$$

ועבור $(x-y, x)$ מקבלים:

$$f\big(xf(x-y)\big) - (x-y)^2 = f\big((x-y)f(y)\big)$$

(הפכנו סדר בין האגפים, לטובת ההמשך) כאשר נסכום את שלוש המשוואות שקיבלנו, חלק מהגורמים יתבטלו על ידי האי-זוגיות של f: $f\big(xf(y-x)\big) + f\big(xf(x-y)\big) = 0$ וגם $f\big((y-x)f(y)\big) + f\big((x-y)f(y)\big) = 0$. מה שנשאר לאחר הביטול הנ"ל הוא:

$$f\big(yf(-x)\big)-(x-y)^2=f\big(yf(x)\big)-x^2-y^2$$

שוב מהאי-זוגיות, $f\big(yf(-x)\big)=-f\big(yf(x)\big)$. נעביר אגפים ונקבל:

$$x^2+y^2-(x-y)^2=2f(yf(x))$$

כלומר $f\big(yf(x)\big)=\frac{x^2+y^2-(x^2+y^2-2xy)}{2}=xy$.

ניתן להחליף בין x,y ולקבל שגם $f\big(xf(y)\big)=xy=f\big(yf(x)\big)$. מכיוון ש-$f$ חח"ע, נובע $xf(y)=yf(x)$. אם נניח בנוסף $x,y\neq 0$ אז $\frac{f(y)}{y}=\frac{f(x)}{x}$. כלומר המספר $b=\frac{f(x)}{x}$ הוא קבוע, ולכן $f(x)=bx$ לכל $x\neq 0$. גם עבור $x=0$ הנוסחה הזו נכונה, כי שני האגפים שווים 0, ולכן פשוט $f(x)=bx$ לכל x.

נציב במשוואה המקורית כדי לראות אילו ערכי b נותנים פתרון תקין:

$$b^2x(y-x)=b^2yx-x^2 \iff -b^2x^2=-x^2 \iff b=\pm 1$$

ולכן הפתרונות היחידים הם $f(x)=x$ לכל x, ו- $f(x)=-x$ לכל x.

6. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$
- $f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)=f\big(\sqrt{xy}\big)\cdot f\big(\sqrt{yz}\big)\cdot f(\sqrt{zx})$
- $1\leq x<y \ \Rightarrow\ f(x)<f(y)$

תשובה. $f(x)=x^r+\frac{1}{x^r}$ עבור $r>0$ קבוע.

פתרון. בשאלות כאלה, בהן הפתרון אינה פונקציה "טבעית" כמו $f(x)=x$ וכדומה, עוזר למצוא פתרון של המשוואה, וסביבו לבנות את פתרון השאלה. במקרה זה, ניתן למצוא בניסוי וטעייה את הפתרון $f(x)=x+\frac{1}{x}$. (נבדוק בהמשך שזה אכן פתרון).

נציב $(x,y,z)=(1,1,1)$ ונקבל $4f(1)=f(1)^3$, כלומר $f(1)=2$ (זכרו ש-$f(1)\neq 0$ כיוון שהפונקציה מקבלת ערכים ב-$\mathbb{R}^+$). לפי הנתון השני, $f(x)\geq 2$ לכל $x\geq 1$.

כעת נציב $(x,y,z)=\left(t,t,\frac{1}{t}\right)$ במשוואה ונקבל:

$$f(t)+f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{t}\right)=f(t)\cdot f(1)\cdot f(1)$$

$$\Longrightarrow 2f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=4f(t)\Longrightarrow f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)\quad (*)$$

בפרט, $f(x)\geq 2$ גם עבור $x\leq 1$, ולכן $f(x)\geq 2$ לכל x. מכאן שקיימת ויחידה פונקציה $g(x)\geq 1$ כך שמתקיים:

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}$$

(זה נכון משום שלכל $Y \geq 2$ קיים ויחיד פתרון $X \geq 1$ למשוואה $Y = X + \frac{1}{X}$) מדוע עשינו את ההצבה הזו?
משום שאנו יודעים כי $f(x) = x + \frac{1}{x}$ היא פתרון למשוואה, ולכן זה יכול להיות מוצלח.

נשים לב שהפונקציה $g(x)$ עולה ממש עבור $x \geq 1$: אכן, הפונקציה $F(X) = X + \frac{1}{X}$ עולה עבור $X \geq 1$. לכן, אם נניח בשלילה ש-$y < x \leq 1$ וגם $g(x) \geq g(y)$, נקבל ש-$f(x) = g(x) + \frac{1}{g(x)} \geq g(y) + \frac{1}{g(y)} = f(y)$, בסתירה לנתון השני בשאלה.

כעת נציב $(x, y, z) = \left(ts, \frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)$ ונקבל:

$$f(ts) + f(ts) + f\left(\frac{t}{s}\right) + f\left(\frac{s}{t}\right) = f(t) \cdot f(s) \cdot f(1)$$

מ-$(*)$ נקבל ש-$f\left(\frac{t}{s}\right) = f\left(\frac{s}{t}\right)$. לאחר חלוקה ב-2 נקבל:

$$f(ts) + f\left(\frac{t}{s}\right) = f(t)f(s) \quad (**)$$

טענה. לכל $n \geq 0$ שלם, מתקיים $g(x^n) = g(x)^n$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n. אם $n = 0$, צריך להוכיח ש-$g(1) = 1$. זה נכון כי $f(1) = 2 = g(1) + \frac{1}{g(1)}$, והפתרון היחיד לכך הוא $g(1) = 1$.

אם $n = 1$, צריך להוכיח ש-$g(x) = x$, וזה ברור.

נניח ש-$n \geq 2$, ושהוכחנו זאת כבר לכל $0 \leq n' < n$. נציב $(t, s) = (x^{n-1}, x)$ במשוואה $(**)$:

$$f(x^n) + f(x^{n-2}) = f(x^{n-1})f(x)$$

נציב $f = g + \frac{1}{g}$ בכל מקום:

$$g(x^n) + \frac{1}{g(x^n)} + g(x^{n-2}) + \frac{1}{g(x^{n-2})} = \left(g(x^{n-1}) + \frac{1}{g(x^{n-1})}\right)\left(g(x) + \frac{1}{g(x)}\right)$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה על $n-1, n-2$:

$$g(x^n) + \frac{1}{g(x^n)} + g(x)^{n-2} + \frac{1}{g(x)^{n-2}} = \left(g(x)^{n-1} + \frac{1}{g(x)^{n-1}}\right)\left(g(x) + \frac{1}{g(x)}\right)$$

נפתח סוגריים באגף ימין:

$$g(x^n) + \frac{1}{g(x^n)} + g(x)^{n-2} + \frac{1}{g(x)^{n-2}} = g(x)^n + \frac{1}{g(x)^n} + g(x)^{n-2} + \frac{1}{g(x)^{n-2}}$$

נבטל את הגורם שמופיע בשני האגפים:

$$g(x^n)+\frac{1}{g(x^n)}=g(x)^n+\frac{1}{g(x)^n}=Y$$

מכיוון ש-$Y=f(x^n)\geq 2$, למשוואה $X+\frac{1}{X}=Y$ יש פתרון יחיד המקיים $X\geq 1$. אך $g(x^n),g(x)^n$ שניהם עונים על הקריטריון הזה, לכן $g(x^n)=g(x)^n$ כדרוש. מש"ל.

נובע גם שלכל $q=\frac{m}{n}\geq 0$ רציונלי, מתקיים:

$$g(x^q)^n=g(x^{qn})=g(x^m)=g(x)^m$$

ולכן $g(x^q)=(g(x)^m)^{1/n}=g(x)^q$. בפרט, אם נסמן $g(2)=c$, אז $g(2^y)=c^y$ לכל $y\geq 0$ רציונלי. בדומה לטיעון בשאלה 5, נרחיב את הזהות הזו לכל $y\geq 0$ ממשי: נניח בשלילה ש-$g(2^y)\neq c^y$. בה"כ נניח $g(2^y)>c^y$ (ההוכחה למקרה השני דומה). נסמן $g(2^y)=c^z$ כאשר $y<z$. קיים מספר רציונלי q כך שמתקיים $y<q<z$. משום ש-g עולה עבור $x\geq 1$, נקבל:

$$c^q<c^z=g(2^y)\leq g(2^q)=c^q$$

וסתירה. לכן $g(2^y)=c^y$ לכל $y\geq 0$. אם נסמן $c=2^r$ כאשר $r>0$, נקבל $g(2^y)=(2^y)^r$, כלומר $g(x)=x^r$ לכל $x\geq 1$.

קיבלנו ש- $f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}=x^r+\frac{1}{x^r}$ לכל $x\geq 1$. עבור $x\leq 1$ זה גם נכון, כי:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^r+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^r}=x^r+\frac{1}{x^r}$$

ולכן $f(x)=x^r+1/x^r$ לכל x. נבדוק שלכל $r>0$, הפונקציה הזו מקיימת את התנאים הדרושים: אכן, מפתיחת סוגריים נקבל

$$\left(\sqrt{XY}+\frac{1}{\sqrt{XY}}\right)\left(\sqrt{YZ}+\frac{1}{\sqrt{YZ}}\right)\left(\sqrt{ZX}+\frac{1}{\sqrt{ZX}}\right)=XYZ+X+Y+Z+\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{XYZ}$$

ואם נציב $X=x^r,Y=y^r,Z=z^r$ נקבל בדיוק את הזהות

$$f\left(\sqrt{xy}\right)\cdot f\left(\sqrt{yz}\right)\cdot f\left(\sqrt{zx}\right)=f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)$$

כמו כן, לכל $1\leq x<y$ מתקיים $x^r<y^r$, ושוב כיוון שהפונקציה $F(X)=X+\frac{1}{X}$ עולה, מתקיים

$$x^r+\frac{1}{x^r}<y^r+\frac{1}{y^r}$$

כמו שרצינו.