תרגיל 4

1. המישור חולק על ידי n ישרים ומעגלים, הוכיחו כי את המפה שהתקלה ניתן לצבוע בשני צבעים כך ששני חלקים שכנים (נפרדים על ידי קטע או קשת) נצבעים בצבעים שונים.

פתרון: נוכיח באינדוקציה. בסיס האינדוקציה ברור: כאשר יש רק ישר או מעגל אחד ניתן לצבוע את שני החלקים שנוצרים בצבעים שונים.

צעד האינדוקציה: נוריד ישר או מעגל אחד ונצבע את המפה שנשארה בשני צבעים (אפשר מהנחת האינדוקציה), נחזיר את המעגל (או הישר שהורדנו) ונשמור על הצבעים של כל החלקים מצדו האחד את הצבעים של כל החלקים מצדו האחר נשנה לצבעים ההפוכים, ברור שבכל צד בנפרד הצביעה בסדר וגם בחיבור הם בסדר כי כל שני חלקים ששכנים לפי המעגל שהורדנו צבועים בצבעים הפוכים.

2. בפנים של ריבוע עם צלע 1 סומנו $n > 101$ נקודות, כך שאף שלוש לא על ישר. משולש יקרא מסומנן אם קודקודיו הם נקודות מסומנות. הוכיחו כי שטחו של אחד המשולשים המסומנים קטן מ- $\frac{1}{100}$.

פתרון ראשון: נתבונן בקמור של הנקודות המסומנות ונחלק אותו למשולשים מסומנים מינימאליים, נעשה זאת כך: אם בתוך הקמור אין נקודות מסומנות אז נעביר את כל האלכסונים (של הקמור) היוצאים מקודקוד כלשהו. אם בפנים של הקמור יש נקודה מסומנת אז נחבר אותה עם כל הקודקודים של הקמור, אם יש עוד נקודה מסומנת שנמצא באחד המשולשים שיצרנו אז נחבר אותה לקודקודי המשולש שהיא נמצאת בו.

כעט נחסום מלמטה את כמות המשולשים שייצרנו, נסמנה x.
נספור את סכום הזוויות של המשולשים שיצרנו, מצד אחד הוא בברור שווה $180 \cdot x$ ומצד שני הוא שווה לסכום הזוויות של הקמור ועוד 360 כפול כמות הנקודות המסומנות בפנים של הקמור. נסמן את כמות הקודקודים של הקמור ב-m ונקבל את המשוואה:

$$180 \cdot x = 180 \cdot (m - 2) + 360 \cdot (n - m)$$

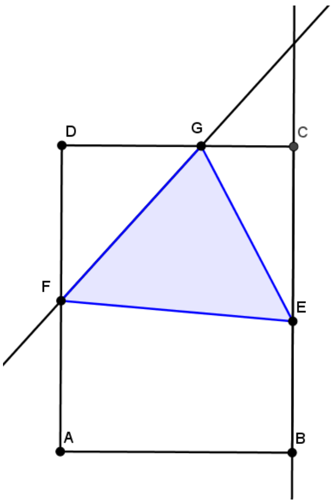
ולכן $x = 2n - m - 2$ ולכן x מקבל את ערכו המינימאלי כאשר

$m = n$ ואז $x = n - 2$, כלומר $x \geq 100$ ולכן חילקנו את הקמור שלנו, ששטחו בברור קטן משטח הריבוע, ללפחות 100 משולשים מסומנים ולכן שטחו של אחד מהם חייב להיות קטן מ- $\frac{1}{100}$.

פתרון שני: נטיל את כל הנקודות המסומנות על אחת מצלעות הריבוע ונחלק את הצלע הזו ל-50 קטעים באורך $\frac{1}{50}$. $n > 100$ ולכן יהיה קטע שבו יהיו לפחות שלוש הטלות של נקודות מסומנות, כלומר קיבלנו שיש לנו שלוש נקודות מסומנות בתוך מלבן עם גובה 1 ואורך $\frac{1}{50}$ ולכן בשביל לסיים את הפתרון נשאר לנו להוכיח את הלמה:

למה: שטחו של משולש החסום במלבן לא עולה על חצי משטח המלבן.

הוכחה: נזיז את צלעות המלבן בצורה מקבילה עד שקודקודי המשולש יהיו על צלעות המלבן ונטען ששטחו של המשולש לא עולה על חצי משטח המלבן החדש, ששטחו בברור קטן משטח המלבן המקורי.



אם שני קודקודי המשולש נמצאים על צלע של המלבן אז הטענה ברורה כי גובה המשולש חסום על ידי צלע אחת של המלבן וצלע המשולש חסומה על ידי הצלע האחרת של המלבן.

אחרת הקונפיגורציה היא כמו בציור. נשים לב שאם אנו מזיזים את E על BC בכיוון B אז המרחק מ-E ל-FG גדל ולכן גם שטח המשולש גדל, כלומר ניתן להניח ש-E נמצא ב-B, בדיוק באותה צורה נזיז את F ולא משנה אם הוא יגיע ל-A או ל-D נקבל מצב שבו יש שני קודקודים על צלע אחת של המלבן ובמקרה הזה כבר טיפלנו. הוכחנו את הלמה.

3. נתון מצולע משוכלל בעל n קודקודים. חישבו את כמות המשולשים השונים (לא חופפים) שקודקודיהם מתלכדים עם קודקודי המצולע.

פתרון: תמיד ניתן לסובב את המשולש כך שאחד מקודקודיו יתלכד עם קודקוד קבוע של המצולע שנסמנו A. יש לנו שלושה סוגים של משולשים שווי צלעות שווי שוקיים ושוני צלעות. כל משולש משוכלל שווה בדיוק למשולש משוכלל אחד עם הקודקוד A. עבור כל משולש שווה שוקיים יש שלושה משולשים חופפים לו שאחד מקודקודיהם הוא

A, כאשר A הוא הקודקוד השמאלי הימני או קודקוד הראש. ועבור כל משולש שונה צלעות יש בדיוק שישה משולשים שחופפים לו ואחד מקודקודיהם הוא A, יש שלוש דרכים לבחור איזה קודקוד A יהיה (שמאלי ימני או אמצעי) ולכל בחירה יש שתי בחירות באילו צלעות A יגע (זה לא שלוש בחירות כי כאשר A הקודקוד השמאלי או הימני הוא חייב לגעת בצלע הארוכה ביותר, וכאשר A הוא הקודקוד האמצעי הוא לא יכול לגעת בצלע הארוכה ביותר).

נסמן את כמות המשולשים השונים שהם שווי צלעות, שווי שוקיים, שוני צלעות ב-x, y, z בהתאמה, נשים לב כי כמות המשולשים עם קודקוד קבוע A היא $\binom{\mathrm{n}-1}{2}$ ונקבל משוואה:

$$x + 3y + 6z = \binom{\mathrm{n}-1}{2}$$

נשים לב כי $x = 0$ אם n לא מתחלק ב-3 ו-$x = 1$ אם n מתחלק ב-3.

בנוסף $y = \frac{n}{2} - 1$ אם n זוגי ו-$y = \frac{n-1}{2}$ אם n אי זוגי, אבל אם n מתחלק ב-3 אז אחד מהמשולשים שווי השוקיים הוא גם שווה צלעות.

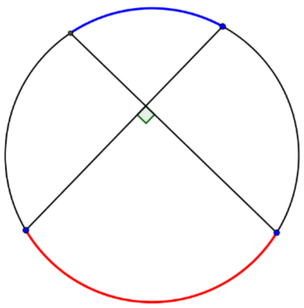
נניח ש-n מתחלק ב-6 ונקבל ש-

$$6(x + y + z) = x + 3y + 6z + 5x + 3y = \binom{\mathrm{n}-1}{2} + 5 + 3 \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right) =$$
$$= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} + \frac{3n}{2} + 5 - 6 = \frac{n^2}{2}$$

ולכן כמות המשולשים השונים היא $\frac{n^2}{12}$.

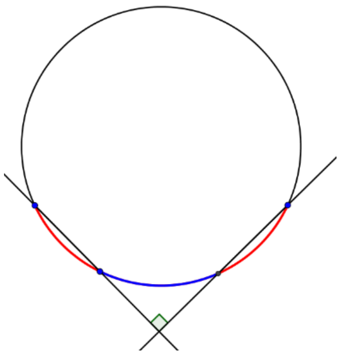
נשים לב שאם n לא יתחלק ב-3 אבל יתחלק ב-2 אז המספר שלנו ישתנה ב-$\frac{-5+3}{6} < \frac{1}{2}$, אם n יתחלק ב-3 אבל לא ב-2 אז המספר שלנו ישתנה ב-$\frac{+\frac{3}{2}}{6} < \frac{1}{2}$ ואם n לא יתחלק לא ב-3 ולא ב-2 אז המספר שלנו ישתנה ב-$\frac{-5+3+\frac{3}{2}}{6} < \frac{1}{2}$ ולכן סך הכל נקבל שכמות המשולשים השונים שונה בפחות מ-$\frac{1}{2}$ מ-$\frac{n^2}{12}$ ולכן הוא שווה ל-$[\frac{n^2}{12}]$.

4. נתון מעגל ועליו מסומנות 100 נקודות כך שהאורכים בין של הקשתות שהנקודות יוצרות הם מספרים טבעיים מ-1 עד 100 בסדר שרירותי.
הוכיחו כי קיימות ארבע נקודות מסומנות כך שניתן להעביר דרכן זוג ישרים מאונכים.



פתרון: כולם יודעים שבמעגל שני מייתרים מאונכים אם ורק אם סכום הקשתות שהם יוצרים שווה למחצית ההיקף (הכחולה והאדומה בציור).

אבל מה יקרה אם שתי הקשתות (הכחולה והאדומה) יחתכו, או שאחת תהיה מוכלת בשנייה? אנו נטען שעדיין יהיו שני ישרים מאונכים.



במקרה שבו הקשת האדומה מכילה את הקשת הכחולה נקבל שהזווית בין הישרים שמחברים את הקצוות של הקשתות מתאימה להפרש בין הקשת שמשליה את השקת האדומה למעגל לקשת הכחולה, כלומר הזווית מתאיה לקשת שנוצר מהחסרת הקשת האדומה והכחולה מכל המעגל ולכן היא ישרה אם ורק הסכום של הקשת האדומה והכחולה שווה למחצית מאונך המעגל.

המקרה שבו הקשתות נחתכות שקול למקרה שבו קשת אחת מכילה את השקת השנייה מכיוון שנהפוך את החיתוך של שתי הקשתות להיות הקשת הכחולה מהמקרה של הכלה ואת שני הקצוות הנותרים נחבר לקשת האדומה מהמקרה של הכלה. שימו לב שזה בסדר גם אם החיתוך הוא 0, כלומר לשתי הקשתות יש קצה משותף.

נתבונן בזוגות של נקודה מסומנת והנקודה המסומנת הרחוקה ממנה. נשים לב שבכל זוג כזה המרחק בין שתי הנקודות הוא לפחות

$\frac{100\cdot101}{4}-50$ מכיוון שאחרת נסתכל על הנקודה הנגדית לנקודה מסומנת ונקבל שכל הנקודות המסומנות רחוקות ממנה בלפחות 50 ולכן יש קשת שאורכה גדול מ-100 ואין בה נקודות מסומנות, בסתירה.

קיבלנו שלכל נקודה מסומנת ניתן למצוא נקודה מסומנת אחרת שהמרחק ביניהן הוא לפחות $\frac{100\cdot101}{4}-50$ (ברור גם שהוא שלם) ולכן ניתן למצוא קשת אחרת שתשלים אותה ל- $\frac{100\cdot101}{4}$ כפי רצינו.

הוכחנו משהו קצת יותר חזק, הוכחנו שלכל נקודה ניתן למצוא עוד 3 נקודות שמשלימות אותה לרביעית נקודות שמקיימות את הדרישה, כלומר הוכחנו שיש הרבה רביעיות כאלו.

5. מהי כמות הנקודות המקסימלית שניתן לסמן כך שאף שלוש לא על ישר אחד ואף אחד מהמשולשים עם קודקודים בנקודות המסומנות לא יהיה קהה זוויות?

א. כאשר הנקודות במישור?

ב. כאשר הנקודות במרחב?

פתרון: א. נבחר שתי נקודות מסומנות $\mathrm{A_1, A_2}$ ונתבונן במקום הגיאומטרי של כל הנקודות B כך ש- $\measuredangle \mathrm{BA_1A_2}, \measuredangle \mathrm{BA_2A_1} \leq 90^{\mathrm{o}}$, זוהי קבוצת כל הנקודות הנמצאות בין שני האנכים ל-$\mathrm{A_1A_2}$ ב-$\mathrm{A_1}$ ו-$\mathrm{A_2}$, למקום הגיאומטרי הזה נקרא הפס של הנקודה הראשונה והנקודה השנייה.

כעט נתבונן בקמור של כל הנקודות המסומנות. ברור שהקמור צריך להיות מוכל בכל הפסים של כל זוג נקודות ולכן לא יתכן שנקודה מסומנת תהיה בפנים של הקמור כי היא נמצאת על השפה של כל הפסים שלה והקמור מוכל בהן ולכן היא חייבת להיות על השפה של הקמור.

נניח שהצלחנו לסמן n שמקיימות את התנאים, כפי שהוכחנו הקמור שלהן שייב להיות מצולע בעל n צלעות ולכן סכום הזוויות שלו שווה $180^{\mathrm{o}} \cdot (n-2)$ ואם אנו רוצים שכל הזוויות יהיו חדות אז צריך להתקיים $180^{\mathrm{o}} \cdot (n-2) < 90^{\mathrm{o}} n$ ולכן $n \leq 4$.

דוגמה עבור $n = 4$ זה פשוט ריבוע.

ב. נבדוק מה השתנה מהסעיף הקודם, הפס של זוג נקודות יהפוך לכל הנקודות בין המישורים שעוברים דרך שתי הנקודות ומאונכים לקטע שמחבר אותן. הקמור של כל הנקודות המסומנות הוא החיתוך של כל הפסים ועדיין אין נקודות מסומנות בפנים של הקמור.

אנחנו נתבונן בהזזות של הקמור של הנקודות המסומנות בווקטורים $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_j}}$, נסמן אותם $\mathrm{K_1, K_2, \ldots, K_n}$ ($\mathrm{K_1}$ זה הקמור המקורי). נטען שלאף שניים מהם אין נקודות פנימיות משותפות, אכן אם נתבונן ב- $\mathrm{K_i}$ ו-$\mathrm{K_j}$, נראה ש-$\mathrm{K_j}$ נוצר מ-$\mathrm{K_i}$ מהזזה בווקטור $\overrightarrow{\mathrm{A_iA_j}}$ אבל $\mathrm{K_i}$ מוכל בפס של

הנקודה ה-j-ית והנקודה ה-i-ית (הזזה שלו) ו-K_j גם מוכל בפס כזה אך ההבדל בין שני הפסים הוא שהפס השני נוצר מהזזה של הפס הראשון בווקטור $\overrightarrow{A_iA_j}$ ולכן שני הפסים נחתכים רק בשפה שלהם (מישור שמפריד ביניהם) כלומר לשני הפסים אין נקודות פנימיות משותפות ולכן בפרט גם ל-K_i ו-K_j אין נקודות פנימיות משותפות.

כעט נטען כי כל ה-K_i-ים מוכלים בהומותטיה פי שתיים של הקמור המקורי מ-A_1.

נתבונן ב-2 נקודות של הקמור המקורי, נסמן אותן X, Y ונטען כי הנקודה Z שמתקבלת מ-Y על ידי הזזה בווקטור $\overrightarrow{A_1X}$ נמצאת בהומותטיה של הקמור, זה נובע מכך שאמצע הקטע A_1Z הוא גם אמצע הקטע XY ולכן מוכל בקמור המקורי ולכן Z נמצאת בומוטתיה פי שתיים של הקמור המקורי. סך הכל קיבלנו שכל ה-K_i-ים מוכלים בהומותטיה של הקמור.

אם הנפח של הקמור המקורי הוא v ויש לנו n נקודות מסומנות אז הנפס של כל ההזזות הוא nv (כי אין להן נקודות פנימיות משותפות) והנפח של ההומותטיה פי שתיים הוא בברור $8v$ ולכן $nv \leq 8v$ ולכן $n \leq 8$.

ברור ש $n = 8$ אפשרי, פשוט נסמן נבחר את הנקודות המסומנות להיות קודקודים של קובייה.

6. נתון ריבוע 1×1, בתוך הריבוע סומנו n חלקים, כל אחד בצבע שלו, כל חלק מורכב מכמות סופית של רכיבי קשירות רציפים. שטחו של כל חלק לא יורד מ-c. הוכיחו כי קיימים שני צבעים ששטחם המשותף הוא לפחות $\frac{m(m-1)}{n(n-1)} - c \cdot \frac{(m-1)}{n-1} 2$ כאשר $\frac{m-1}{n} \leq c \leq \frac{m}{n}$

פתרון: נסמן ב-S_i את השטח של החלק ה-i, ב-$S_{i,j}$ את השטח של החיתוך של החלק ה-i והחלק ה-j, ב-$S_{i,j,k}$ את השטח של החיתוך של החלקים ה-i ה-j וה-k, וכך הלאה.

כל השטח הצבוע (בלפחות צבע אחד) שווה

$$\sum S_i - \sum S_{i,j} + \sum S_{i,j,k} - \ldots + (-1)^{n-1} \sum S_{1,\ldots,n}$$

נחסר את השטח הזה משטח הריבוע וקבל אי-שוויון

$$1-\sum \mathrm{S_i}+\sum S_{i,j}-\sum S_{i,j,k}+\ldots+(-1)^n\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0 \qquad (1)$$

נרשום כמה מהשטח של הצבע הראשון צבוע:

$$\sum S_{i,j}-\sum S_{i,j,k}+\ldots+(-1)^{n-2}\sum S_{1,\ldots,n}$$

שוב נחסר את השטח הזה משטח של הצבע הראשון ונקבל אי-שוויון

$$\mathrm{S_i}-\sum S_{i,j}+\sum S_{i,j,k}-\ldots+(-1)^{n-1}\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0$$

נסכום את כל האי-שוויונים האלו, לכל הצבעים ונקבל את אי-השוויון:

$$\sum \mathrm{S_i}-2\sum S_{i,j}+3\sum S_{i,j,k}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0 \qquad (2)$$

נחשב כמה מהשטח שמוכל בצבעים ה-i,j, לא צבוע, הוא גדול שווה ל-0
ולכן נקבל אי שוויון, נסכום את כל האי-שוויונים האלו על כל ה-i,j
ונקבל את אי השוויון

$$(3)\ \sum S_{i_1,i_2}-\binom{3}{2}\sum S_{i_1,i_2,i_3}+\binom{4}{2}\sum S_{i_1,i_2,i_3,i_4}-\ldots+(-1)^{n-2}\cdot\binom{n}{2}\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0$$

בדיוק באותה הצורה נקבל את אי-השוויונים הבאים:

$$(4)\quad \sum S_{i_1,i_2,i_3}-\binom{4}{3}\sum S_{i_1,i_2,i_3,i_4}+\ldots+(-1)^{n-3}\cdot\binom{n}{3}\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0$$
$$(5)\quad \sum S_{i_1,i_2,i_3,i_4}-\binom{5}{4}\sum S_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}+\ldots+(-1)^{n-4}\cdot\binom{n}{4}\sum S_{1,\ldots,n}\geq 0$$

המתרה שלנו היא לחסום מלמטה את $\sum \mathrm{S_{i,j}}$ ולכן נרצה לסכום את אי השוויונים
שקיבלנו כך שהסכומים עם יותר חלקים יצטמצמו, זו בקשה מוגזמת ולכן
נתפשר בשכך שכל הסכומים $\sum S_{i_1,i_2,i_3},\sum S_{i_1,i_2,i_3,i_4},\ldots,\sum S_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ יצטמצמו.

נרצה לסכום את $(1),(2),(3),\ldots$ עם מקדמים $1,x_1,x_2,\ldots$ ונקבל
מערכת משוואות:

$$\begin{cases} -1+3x_1-3x_2+x_3=0 \\ 1-4x_1+6x_2-4x_3+x_4=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^m+(-1)^{m-1}mx_1+(-1)^{m-2}\binom{m}{2}x_2+\ldots+\binom{m}{m-2}x_{m-2}=0 \end{cases}$$

או בצורה יותר סימטרית

$$\begin{cases} \binom{3}{1}x_1 - \binom{3}{2}x_2 + \binom{3}{3}x_3 = 1 \\ \binom{4}{1}x_1 - \binom{4}{2}x_2 + \binom{4}{3}x_3 - \binom{4}{4}x_4 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \binom{m}{1}x_1 - \binom{m}{2}x_2 + \binom{m}{3}x_3 - \dots + \binom{m}{m-2}x_{m-2} = 1 \end{cases}$$

המטריצה של המערכת הזו מתקבל ממטריצה משולשית על ידי הורדה של שתי העמודות הראשונות ושתי העמודות האחרונות, זו מערכת שקל מאוד לפתור, לא נפרט את החישוב ונרשום ישר את פתרון המערכת:

$$x_1 = \frac{\binom{m-1}{2}}{\binom{m}{2}} = \frac{m-2}{m}, x_2 = \frac{\binom{m-2}{2}}{\binom{m}{2}} = \frac{(m-2)(m-3)}{m(m-1)},$$

$$x_3 = \frac{\binom{m-3}{2}}{\binom{m}{2}} = \frac{(m-3)(m-4)}{m(m-1)}, \dots ,$$

$$x_{m-2} = \frac{1}{\binom{m}{2}} = \frac{2}{m(m-1)}$$

עכשיו נחבר את אי השוויונים שלנו עם המקדמים שמצאנו ונקבל אי שוויון כזה:

$$1 - \frac{2}{m}\sum S_i + \frac{2}{m(m-1)}\sum S_{i,j} - A_{m+1}\sum S_{i_1,\dots,i_{m+1}} + A_{m+2}\sum S_{i_1,\dots i_{m+2}} - \dots + (-1)^{n-m}A_n S_{1,\dots,n} \geq 0$$

כאשר ה-Aים הם מקדמים כלשהם שאנו יכולים לחשב אבל לא נעשה זאת כי עכשיו נתעלם מכל הסכומים של הרבה חיתוכים (כולם חוץ מ-0,1 או 2 חיתוכים), ברור שאפשר לעשות זאת ולכן נקבל את אי השיוויון-

$$1 - \frac{2}{m}\sum S_i + \frac{2}{m(m-1)}\sum S_{i,j} \geq 0$$

כלומר $\sum S_{i,j} \geq (m-1)\sum S_i - \frac{m(m-1)}{2} \geq (m-1)nc - \frac{m(m-1)}{2}$

ולכן משובך יונים נקבל שאחד מבין $S_{i,j}$ הוא לפחות

$$\frac{2(m-1)}{n-1}c - \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

ושוויון יכול להתקיים רק כאשר חיתוך של כל $m+1$ צבעים ריק וברור שזה יכול להתקיים רק אם $c \leq \frac{m}{n}$ וזה בדיוק מה שרצינו.

אפשר גם להראות שהחסם שקיבלנו הדוק, נראה דוגמה עבור $n=5$, $c=\frac{1}{2}$ ויש שני צבעים שהשטח המשותף שלהם הוא $\frac{1}{5}$:

23	15	14	13	12
45	35	34	25	24
135	134	125	124	123
345	245	235	234	145

המספרים מסמנים את הצבעים, כל משבצת שרשום בה 1 שייכת לצבע הראשון, מהדוגמה הזו ניתן לבנות דוגמה כללית ונשאיר את זה לקורא המתעניין.