תחנת דלק

1. הוכיחו גרסאות שונות לבעיית תחנת הדלק:

   א. בהינתן מספרים ממשיים $a_1,\dots,a_n$ כך ש-$a_1+\dots+a_n=0$, הוכיחו כי קיים שלם p כך ש-$\sum_{i=0}^{k-1} a_{p+i} \ge 0$ לכל $1\le k\le n$, כאשר האינדקסים מחושבים מודולו n.

   ב. בהינתן מספרים ממשיים $a_1,\dots,a_n$ כך ש-$a_1+\dots+a_n>0$, הוכיחו כי קיים שלם p כך ש-$\sum_{i=0}^{k-1} a_{p+i} > 0$ לכל $1\le k\le n$, כאשר האינדקסים מחושבים מודולו n.

   ג. בהינתן מספרים שלמים $a_1,\dots,a_n$ כך ש-$a_1+\dots+a_n=1$, הוכיחו כי קיים שלם **יחיד** p כך ש - $\sum_{i=0}^{k-1} a_{p+i} \ge 1$ לכל $1\le k\le n$, כאשר האינדקסים מחושבים מודולו n.

2. נתון שלם חיובי n. לצפרדע יש מטרה להגיע מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (n,n) ב-$2n$ קפיצות דרך נקודות שלמות, כך שהאורך של כל קפיצה הוא 1 ובנוסף הצפרדע לא עולה מעל הישר $y=x$. הוכיחו כי הצפרדע יכולה להגשים את מטרתה ב-$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ דרכים בדיוק.

3. נגדיר קבוצה של נקודות במרחב

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 \,\middle|\, y+1\ge x\ge y\ge z\ge 0\right\}.$$

נתון שלם חיובי n. לצפרדע יש מטרה להגיע מהנקודה $(0,0,0)$ לנקודה (n,n,n) על ידי $3n$ קפיצות דרך נקודות Ω, כך שהאורך של כל קפיצה הוא 1. מצאו את כמות הדרכים שבהן יכולה הצפרדע להגשים את מטרתה.

4. נתונים שלמים חיוביים וזרים p,q. קבוצה T של שלמים אי-שליליים תיקרא *מוצלחת* אם מתקיימים התנאים הבאים:

   א. $0\in T$.

   ב. לכל שלם אי-שלילי n, אם $n\in T$ אז $n+p\in T$ וגם $n+q\in T$.

מצאו את כמות הקבוצות המוצלחות.

5. נתון שלם חיובי n. נתונים ממשיים אי-שליליים $x_1,\ldots,x_{2n}$ שסכומם 4. הוכיחו כי קיימים שלמים p,q כך ש-$0\le q\le n-1$ וכן מתקיימים אי השוויונים הבאים:

$$\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1}\le 1,\quad \sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i}\le 1$$

כאשר האינדקסים מחושבים מודולו $2n$.

הערה. אם $q=0$ אז $\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1}=0$; אם $q=n-1$ אז $\sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i}=0$.

6. נתונים מספרים שלמים n,k כך ש-$n>k>1$. $2n+1$ אנשים עומדים במעגל, כך ש-$n+1$ מתוכם בנות ו-n הנותרים בנים. לכל איש במעגל נגדיר $2k$ שכנים: k האנשים הקרובים לו ביותר משמאלו ו-k האנשים הקרובים לו ביותר מימינו. הוכיחו כי יש בת במעגל שיש לה לפחות k שכנות בנות.

7. נתון $n\ge 3$ שלם. n שחקנים יושבים במעגל ומשחקים משחק. תחילה, $3n$ כרטיסים הממוספרים ב-$1,2,\ldots,3n$ מפוזרים בין השחקנים, כך שכל שחקן מקבל שלושה כרטיסים. לאחר מכן, בכל תור, כל השחקנים בו זמנית מעבירים את הקלף הקטן ביותר שבידם לשחקן שמימינם, מעבירים את הקלף הגדול ביותר שבידם לשחקן שמשמאלם, ומשאירים את הקלף האמצעי אצלם. נסמן ב-T_r את חלוקת הכרטיסים אחרי r מהלכים, כך ש-T_0 היא החלוקה ההתחלתית. הוכיחו כי הסדרה T_r מחזורית לבסוף עם מחזור n, ומצאו את השלם האי-שלילי הקטן ביותר m כך שלכל חלוקה התחלתית T_0 מתקיים $T_m=T_{m+n}$ (שתי חלוקות הנבדלות בסיבוב נחשבות שונות).

8. נתונה רשימה של כל תתי-הקבוצות בגודל k של הקבוצה $\{1,2,3,\ldots,2k+1\}$: כל קבוצה רשומה בסדר עולה מהמספר הקטן למספר הגדול בשורה נפרדת, כאשר רשימת הקבוצות מסודרת בסדר המילוני. נתונה רשימה דומה של כל תתי הקבוצות בגודל $k+1$ הבנויה לפי אותו עיקרון. רון רוצה למצוא זיווג בין קבוצות ברשימה הראשונה וקבוצות ברשימה השנייה, כך שבכל זוג הקבוצה הראשונה תהיה מוכלת בקבוצה השנייה, וכל קבוצה ברשימה תשתתף בזוג אחד בדיוק. רון משתמש בשיטה המפגרת למציאת הזיווג: הוא עובר על הרשימה הראשונה לפי הסדר, ולכל קבוצה A ברשימה הראשונה, עובר על הרשימה השנייה לפי הסדר, מוצא שם את הקבוצה הראשונה B שמכילה את A ומזווג אותה עם A, ואז מוחק את A ואת B מהרשימות. האם השיטה של רון תעבוד לכל k?

בתאבון!