משפטי צ׳בה ומנלאוס

1. משפט צ׳בה

בטח כולם יודעים שבמשולש שלושת התיכונים נפגשים בנקודה וכך גם שלושת חוצי הזוויות ושלושת הגבהים. אבל ההוכחות לטענות האלה לא טריוויאליות (בלי צ׳בה) ואם אתם לא זוכרים מומלץ לנסות להוכיח.

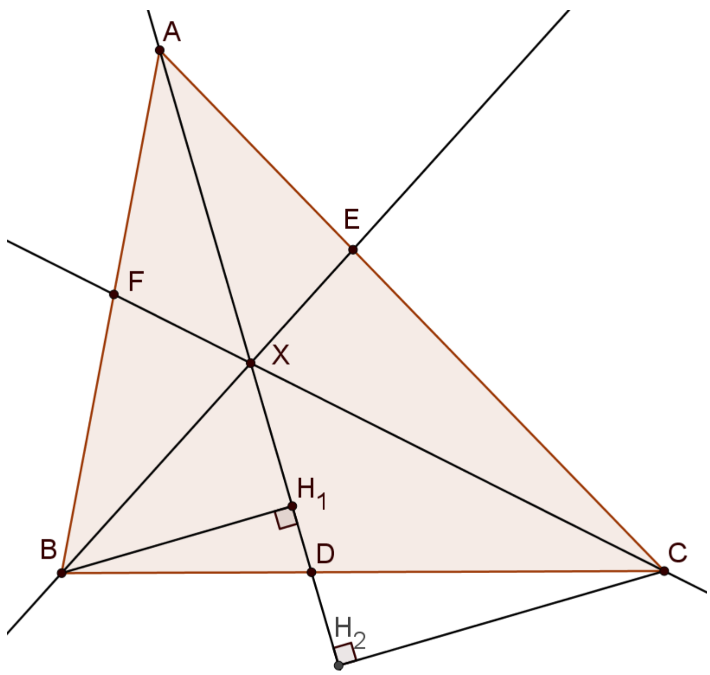
אפשר לשאול את השאלה הכללית, אם יש לנו משולש ABC ושלוש נקודות על הצלעות מתי שלושת הישרים שמחברים את הנקודות לקודקודים הנגדיים נחתכים בנקודה?

משפט צ׳בה עונה על השאלה.

ניסוח המשפט: נתון משולש ABC, על הצלעות AB, AC, BC נבחרו נקודות F, E, D בהתאמה. הישרים AD, BE, CF נחתכים בנקודה אחת אם ורק אם

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

הוכחה ראשונה למשפט: נניח שהישרים נחתכים בנקודה X ונוכיח שהיחס מתקיים. נסמן את השטחים של המשולשים ABX, ACX, BCX



ב-S_1, S_2, S_3, ואת עקבי האנכים מ-B, C ל-AD ב-H_1, H_2.

נשים לב שהמשולשים BDH_1 ו-CDH_2 דומים ולכן $\frac{BD}{DC}=\frac{BH_1}{CH_2}$ אבל $\frac{BH_1}{CH_2}=\frac{BH_1\cdot AX}{CH_2\cdot AX}=\frac{S_1}{S_2}$ ולכן נקבל ש-

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_3}{S_1}=1$$

בשביל הכיוון השני נשים לב שאם AD, BE נחתכים ב-X ו-CX חותך את AB ב-F' אז מהכיוון שהוכחנו כבר מתקיים ש-

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE}$$

וברור שיש רק נקודה אחת על הצלע שמקיימת את התנאי הזה וזה מסיים את ההוכחה של המשפט.

הוכחה שנייה: נשים בקודקודי המשולש משקלים α, β, γ ונחשב את מרכז הכובד של שלושת המשקלים. נשים לב שאפשר לחשב אותו בחלקים, תחילה לחשב את מרכז הכובד של A, B זו נקודה שנקרא לה F שנמצאת על AB ומחלקת אותה ביחס $\frac{\alpha}{\beta}$ ואז לחשב את מרכז המסה של F עם C כאשר ב-C יהיה משקל γ וב-F יש משקל $\alpha+\beta$. נקבל שמרכז המסה נמצא על CF. אבל יכלנו לחשב את מרכז הכובד גם בדרך אחרת, תחילה לחשב את מרכז המסה של של A עם C, זו נקודה על AC שנקרא לה E שמחלקת את AC ביחס $\frac{\alpha}{\gamma}$ ואז לחשב את מרכז המסה של E עם B ולכן מרכז המסה נמצא גם על BE. בדיוק באותו אופן נסמן את מרכז המסה של B, C ב-D ונקבל ש-D מחלק את BC ביחס של $\frac{\gamma}{\beta}$ ומרכז הכובד של A, B, C נמצא גם על AD. סך הכל מצד אחד קיבלנו ש-AD, BE, CF נחתכים בנקודה ומצד שני:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}=1$$

וזה בדיוק משפט צ'בה (אחנו יכולים לבחור את המשקלים בשביל לכל כל שלישייה של נקודות על הצלעות שמקיימות את היחס במשפט צ'בה).

נשים לב שבהוכחה השנייה הוכחנו קצת יותר, הוכחנו גם ש-X (נקודת החיתוך של AD, BE, CF) מחלקת את AD ביחס של $\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$

זאת מפני שהיא מרכז הכובד של α, β, γ אך היא גם מרכז הוכבד של D עם משקל $\beta + \gamma$ ו-A עם משקל α. כמובן שהיא מחלקת גם את BE, CF ביחסים המתאימים.

הערה: ישר המחבר קודקוד של משולש לנקודה על הצלע הנגדית נקרא צ'ביאנה.
אחרי שאנחנו יודעים את משפט צ'בה אנחנו יכולים להוכיח שהרבה דברים נפגשים בנקודה.
תרגילים לקורא:
1. הוכיחו שהצ'ביאנות הבאות נפגשות בנקודה:
א. תיכונים.
ב. חוצי זוויות.
ג. גבהים.
ד. צ'ביאנות שמחברות את הקודקודים עם נקודת ההשקה של החסום.
ה. צ'ביאנות שמחברות את הקודקודים עם נקודת ההשקה של החסום מבחוץ.
2. הוכיחו שבטרפז הישר שמחבר את חיתוך האלכסונים עם חיתוך הצלעות הנגדיות חוצה את בסיסי הטרפז.

2. משפט מנלאוס

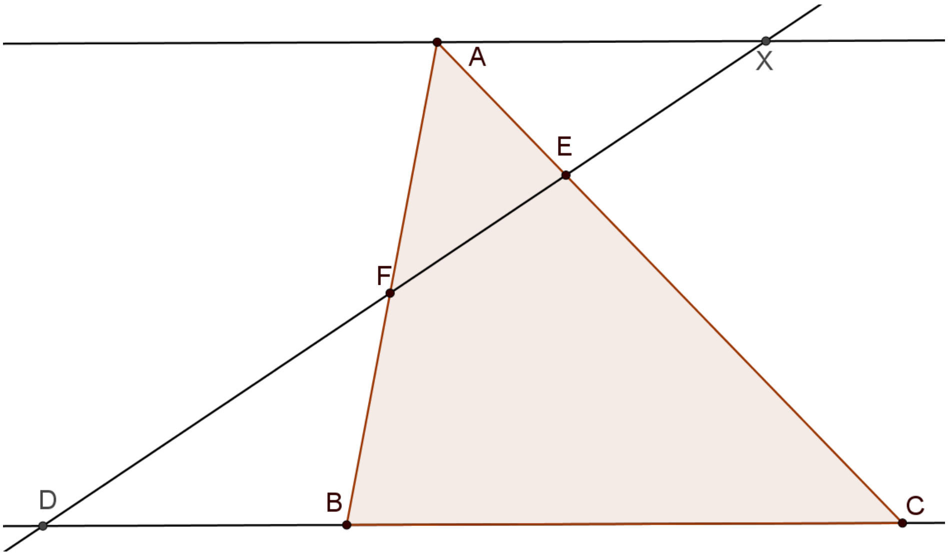
דיברנו על השאלה מתי שלוש ישרים נפגשים בנקודה, עכשיו נדבר מתי שלוש נקודות נמצאות על ישר.

משפט מנלאוס: נתון משולש ABC, על הצלעות AB, AC, BC נבחרו נקודות F, E, D בהתאמה. D, E, F נמצאות על ישר אחד אם ורק אם:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

הוכחה ראשונה: כיוון ראשון, נניח ש-D, E, F על ישר ונוכיח את הנוסחה.
נעביר דרך A ישר המקביל ל-BC ונחתוך אותו עם DE ב-X.

נשים לב שהמשולשים AXE ו-CDE דומים וכך גם המשולשים AXF ו-BDF. מהדמיון נקבל יחסים:



$$\frac{AE}{CE}=\frac{AX}{CD}\quad,\quad\frac{AF}{BF}=\frac{AX}{BD}$$

מפה נקבל:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AX}{DB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{XA}=1$$

והוכחנו את הכיוון הראשון!

הכיוון השני נובע מהכיוון הראשון, כי נעביר את הישר D, E ונחתוך אותו עם הצלע AB בנקודה שנסמן אותה F' היא מקיימת את היחס

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE}$$

אבל ברור שיש רק נקודה אחת כזו על הצלע ולכן אם נתנו לנו שלוש נקודות שמקיימות את היחס הן חייבות להיות על ישר אחד.

לפני שנמשיך להוכחות אחרות נשים לב לתופעה ממש מוזרה, הניסוחים של משפט צ׳בה ושל משפט מנלאוס זהים לחלוטין מבחינת הנוסחאות אבל בברור הציורים שדיברנו עליהם שונים לחלוטין. איך זה יתכן? יש סטירה במתמטיקה?
הקורא מתבקש לחשוב מעט על הסטירה ובפסקה הבאה יש הסבר לתופעה.

כמובן שאין סטירה במתמטיקה ואנחנו שיקנו לכם מעט בהוכחה. השקר כמו תמיד מתחבא ליד המילה ״ברור״. בשתי ההוכחות גם של משפט צ׳בה וגם של משפט מנלאוס אמרנו שיש רק נקודה אחת על הצלע שמקיימת יחס נתון אבל זה לא נכון יש שתי נקודות כאלו, אחת על הצלע ואחת על המשכה ולכן בשביל להפוך את ההוכחות שהראנו לתקינות צריך לערוך דיון שלם על האם הנקודות שלנו על הצלעות או על המשכיהן. זה היה הופך את ההוכחות לערוכות וחופרות ולכן במקום לעשות זאת נעשה תריק נפשע.
לכל אחת מהצלעות נבחר כיוון ואז AB יהיה האורך שלו אם A באה לפני B בכיוון שבחרנו ומינוס האורך אם A באה אחרי B, כלומר $AB = -BA$.
ועכשיו באמת יש רק נקודה אחת על צלע AB שמקיימת ש- $\frac{AX}{BX} = c$ כי הנקודה השנייה מקיימת ש- $\frac{AX}{BX} = -c$. כאשר יש כיוון לקטעים הם נקראים קטעים מכוונים.
הקרוא מתבקש לבדוק שהניסוח של משפט צ׳בה מקטעים מכוונים הוא

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

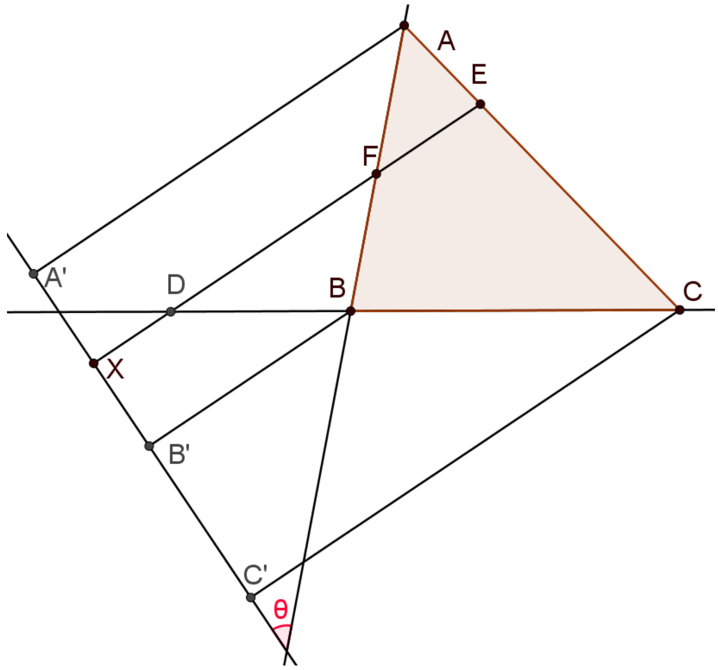
ואילו הניסוח של משפט מנלאוס הוא

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1$$

לאחר שפתרנו את הסטירה במתמטיקה נראה עוד הוכחות למשפט מנלאוס.

הוכחה שנייה: נוכיח את הכיוון שאם הנקודות על ישר אז מתקיים היחס, כפי שכבר הסברנו הכיוון השני נובע.
נעביר ישר l המאונך לישר DEF ונטיל את כל הנקודות על l.

נסמן את ההיטלים של A, B, C ב-A', B', C' ואת ההיטלים של D, E, F נסמן ב-X (ברור שהם מוטלים לנקודה אחת).

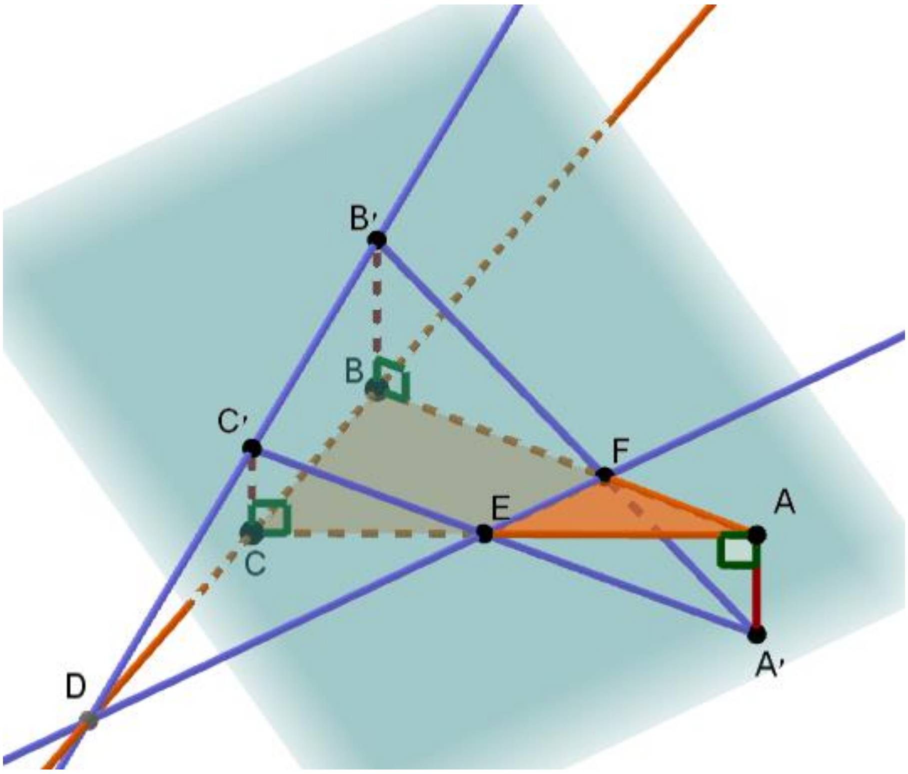


נשים לב שאם הזווית בין AB ל-l היא θ אז $\frac{A'X}{AF} = \sin\theta$ ובאותו אופן $\sin\theta = \frac{XB'}{FB}$ ולכן $\frac{XB'}{FB} = \frac{A'X}{AF}$ כלומר $\frac{AF}{FB} = \frac{A'X}{XB'}$ ובאותו אופן $\frac{BD}{DC} = \frac{B'X}{XC'}$ ו- $\frac{CE}{EA} = \frac{C'X}{XA'}$ נכפיל את שלושת המשוואות ונקבל

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{A'X}{XB'} \cdot \frac{B'X}{XC'} \cdot \frac{C'X}{XA'} = -1$$

הוכחה שלישית: נמרחב! דרך A, B, C נעביר שלושה ישרים l_1, l_2, l_3 המאונכים למישור למישור של ABC. נבחר נקודות A', B', C' על l_1, l_2, l_3 בהתאמה כך ש- $\frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{DC}$ ו- $\frac{CC'}{AA'} = \frac{CE}{EA}$ ואם היחס חיובי אז הנקודות שצדדים שונים של המישור שלנו ואם הוא שלילי אז באותו צד של המישור שלנו.

נשים לב שמדמיון משולשים נובע ש-D, C', B' על ישר וגם ש-E, C', A' על ישר.



עכשיו נסתכל על המישור $A'B'C'$, הוא חותך את המישור של ABC בישר, כפי שאמרנו הנקודות D, E מוכלות בישר הזה. הישר הזה חותך את הצלע AB בנקודה שנסמן אותה F. נשים לב שההטלה של AB על המישור $A'B'C'$ (בכיוון שמאונך למישור של ABC) זה $A'B'$ ובגלל ש-F על AB אז הוא גם על $A'B'$ ולכן $\frac{AF}{FB}=\frac{AA'}{BB'}$ נכפיל את שלושת היחסים ונקבל ש-

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{B'B}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}=-1$$

תרגילים לקורא:

1. הוכיחו שבמשולש החיתוכים של חוצי זוויות חיצוניים עם הצלעות הנגדיות נמצאים על ישר אחד.

2. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות המשולש ב-D, E, F הוכיחו כי החיתוכים של DE, DF, EF עם הצלעות המתאימות נמצאים על ישר אחד.

ההוכחה השלישית מביאה אותנו לרעיון לנסות להכליל את משפט מנלאוס לתלת מימד. נדבר עליו בפרק הבא.

3. גרסאות תלת מימדיות לצ׳בה ומנלאוס.

נתחיל ממשפט מנלאוס. נתונה פירמידה משולשת $ABCD$ ונקודות E, F, G, H על המקצועות AB, BC, CD, DA בהתאמה.

הנקודות E, F, G, H נמצאות על מישור אחד אם ורק אם

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

הוכחה: נניח שהנקודות על מישור ונסמן את עקבי האנכים מ-A, B, C, D למישור ב-A', B', C', D' בהתאמה. נשים לב שהמשולשים $AA'E$ ו-$BB'E$ דומים כי שניהם ישרי זווית ויש להם זווית משותפת ב-E (ברור ש-A', B', E ישר כי זה הטלה של הישר ABE למישור הנתון) ולכן $\frac{AE}{EB}=\frac{AA'}{BB'}$. באותו אופן נקבל ש-$\frac{BF}{FC}=\frac{BB'}{CC'}, \frac{CG}{GD}=\frac{CC'}{DD'}, \frac{DH}{HA}=\frac{DD'}{AA'}$. נכפיל את ארבעת היחסים ונקבל ש-

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

שימו לב שהפעם קיבלנו אחד ולא מינוס אחד כי היו שני סימנים שהצטמצמו.

הכיוון השני נובע מהכיוון הראשון בדיוק כמו בגרסה המישורית. נניח שיחס מתקיים, נעביר את המישור שעובר ב-E, F, G הוא חותך את AD בנקודה שנסמן אותה H' ולכן מהכיוון שכבר הוכחנו היא מקיימת את היחס ולכן היא גם ה-H שהייתה כי יש רק אחת כזו (כי אנחנו עובדים בקטעים מכוונים)

עכשיו צ׳בה מרחבי.

נתונה נקודה M בתוך פירמידה משולשת $ABCD$. על המקצועות AB, BC, CD, DA נבחרו נקודות E, F, G, H בהתאמה. המישורים CDE, DAF, ABG, BCH נחתכים בנקודה אם ורק אם

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

ההוכחה די פשוטה ובעצם זה נובע ישירות ממשפט מנלאוס. נשים לב שאם המישורים נחתכים בנקודה אז אז הנקודות E, F, G, H נמצאות על מישור אחד שנוצר על ידי EG, FH ולכן ממשפט מנלאוס ניצחנו.

הכיוון ההפוך שוב נובע באותו אופן מהכיוון הזה לכן לא נרשום את אותו הדבר בפעם הרביעית.

הערה: גם בגרסה המישורית אפשר יחסית בקלות להוכיח שצ'בה נובע ממלאוס ולהפך אבל זה טיפה פחות ישיר וכבר רשמנו הרבה הוכחות לגרסאות המישוריות אז נשאיר אז זה לקורא הסקרן.

תרגילים לקורא:

1. נתון מרובע מרחבי $ABCD$ החוסם ספירה. הוכיחו כי נקודות ההשקה של צלעות המרובע עם הספירה נמצאות על מישור אחד.

2. הוכיחו כי הקטעים המחברים את אמצעי המקצועות הנגדיות בפירמידה משולשת נחתכים בנקודה.

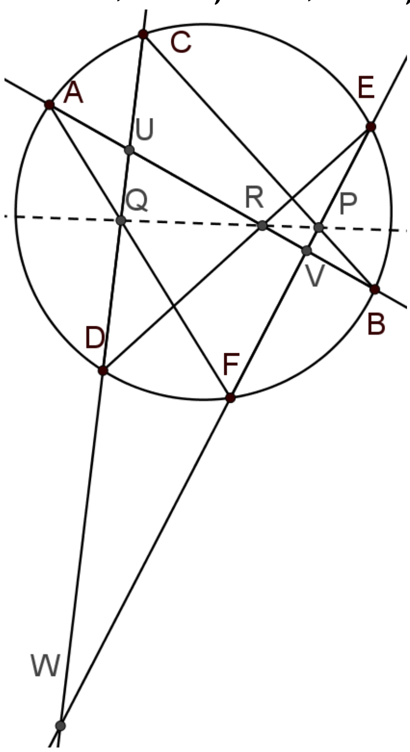
3. תיכון של פירמידה משולשת הוא קטע המחבר בין קודקוד למרכז המסה של הפאה הנגדית. הוכיחו כי התיכונים בפירמידה משולשת נחתכים בנקודה.

4. הוכחה של משפט פסקל.

משפט פסקל אומר שאם ABCDEF משושה החסום בשניונית אז החיתוכים של AB עם DE, AF עם CD ו-BC עם EF נמצאים על ישר.

נוכיח את המשפט למעגל (משיקולים של גיאומטריה פרויקטיבית נובע שזה מספיק)

ההוכחה: נסמן את החיתוך של AB עם DE, AF עם CD, BC עם EF ב-P, Q, R בהתאמה ואת החיתוכים של CD עם EF, AB עם EF, AB עם CD ב-U, V, W בהתאמה.



ממשפט מנלאוס על המשולש UVW והישר RDE נקבל ש-

$$\frac{UD}{DW}\cdot\frac{WE}{EV}\cdot\frac{VR}{RU}=-1$$

ממשפט מנלאוס על המשולש UVW והישר BCP נקבל ש-

$$\frac{UC}{CW}\cdot\frac{WP}{PV}\cdot\frac{VB}{BU}=-1$$

ממשפט מנלאוס על המשולש UVW והישר AFQ נקבל ש-

$$\frac{UQ}{QW}\cdot\frac{WF}{FV}\cdot\frac{VA}{AU}=-1$$

נכפיל את שלושת המשוואות ונקבל:

$$\frac{UD}{DW}\cdot\frac{WE}{EV}\cdot\frac{VR}{RU}\cdot\frac{UC}{CW}\cdot\frac{WP}{PV}\cdot\frac{VB}{BU}\cdot\frac{UQ}{QW}\cdot\frac{WF}{FV}\cdot\frac{VA}{AU}=-1$$

אבל נשים לב ש- $AU\cdot BU=CU\cdot DU$ וכך גם $FV\cdot VE=BV\cdot VA$ ו- $CW\cdot DW=FW\cdot EW$

ולכן אפשר לצמצם מלא דברים ולקבל:

$$\frac{UQ}{QW}\cdot\frac{WP}{PV}\cdot\frac{VR}{RU}=-1$$

ולכן ממשפט מנלאוס קיבלנו ש-P, Q, R על ישר!