טענות בסיסיות

יהי ABC משולש. נסמן ב-ω את המעגל החוסם וב-M את אמצע הצלע BC. נסמן את מפגש המשיקים ל-ω מ-B ו-C ב-T.

הגדרה: הישר AT נקרא התיכושקף של A ביחס למשולש ABC.

למת התיכושקף: $\angle BAT = \angle CAM$.

מסקנה/הגדרה: התיכושקפים נפגשים בנקודה, נסמנה ב-L (נקודת למואן). נקודת למואן צמודה איזוגונלית למפגש התיכונים.

יחסי שטחים: לכל נקודה X על התיכושקף, מתקיים

$$\frac{S_{\Delta ABX}}{S_{\Delta ACX}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

מסקנה: אם D על צלע BC ככה ש-$\frac{BD}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, אז AD הוא תיכושקף במשולש ABC.

תזכורת: $S = \frac{abc}{4R}$.

מרובע הרמוני: יהי $ABCD$ מרובע החסום במעגל, ככה ש-AC הוא תיכושקף במשולש BAD. אז מתקיים $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

דוגמאות

1. במשולש ABC יש נקודה P המקיימת
$$\angle ABP = \angle CAP \quad \angle ACP = \angle BAP$$
הוכיחו כי P נמצאת על התיכושקף מ-A.

2. יהי $ABCD$ מרובע הרמוני. נסמן ב-M, N את אמצעי האלכסונים AC, BD בהתאמה. הוכיחו כי $\angle NAB = \angle MBA$.

3. במשולש ABC, עקבי הגבהים מ-A, B יסומנו H_A, H_B ואמצעי הצלעות של AB, BC יסומנו M_C, M_A. הוכיחו כי הישרים H_AH_B, M_AM_C והתיכושקף מ-A נפגשים בנקודה.

4. במשולש ABC, הוכיחו כי הישר המחבר את אמצע הצלע BC ואת אמצע הגובה מ-A עובר בנקודת למואן.

שאלות לפתרון - תיכושקף

1. משולש ABC חסום במעגל Ω. AD הוא חוצה הזווית במשולש ABC (D על צלע BC). נתונה נקודה P על Ω המקיימת ש-PD הוא חוצה הזווית של $\angle BPC$ ($P \neq A$). הוכיחו כי הישר AP הוא תיכושקף במשולש ABC.

2. משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). נקודה K מקיימת $\angle ABK = \angle BCK$. נסמן ב-D את החיתוך של AK עם BC בטאו את היחס $\frac{BD}{DC}$ בהינתן $r = \frac{BK}{KC}$.

3. במשולש ABC אמצע הצלע AB יסומן ב-M_C ואמצע הצלע AC יסומן M_B. עקב הגובה מ-B יסומן H_B. המעגל החוסם של משולש AM_CH_B חותך את ישר M_BM_C בנקודה P. הוכיחו כי BP הוא תיכושקף במשולש ABC.

4. יהי משולש ABC החסום במעגל Ω. החיתוך של התיכון מ-A ו-Ω יסומן ב-A_1. החיתוך של הישר המקביל לצלע BC ו- Ω יסומן A_2 ($A_1, A_2 \neq A$). באופן דומה מוגדרות B_1, B_2, C_1, C_2. הוכיחו כי הישרים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נפגשים בנקודה.

5. $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים ($AB||CD$). נסמן ב-E את האמצע של AC. נסמן ב-ω את המעגל החוסם של משולש ABE וב-Ω את המעגל החוסם של משולש CDE. נסמן ב-P את נקודת החיתוך בין המשיק ל-ω בנקודה A למשיק ל-Ω בנקודה D. הוכיחו כי PE משיק ל-Ω.