פולינומים סימטריים

הגדרה: יהי $n \geq 1$. נגדיר את פולינומי וייטה $e_i^{(n)}$ באופן הבא:

$$e_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i = x_1 + \cdots + x_n$$

$$e_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$e_3^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

$$\dots$$

$$e_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

נרשום e_i במקום $e_i^{(n)}$ כאשר כמות המשתנים תהיה ברורה מההקשר. מפתיחת סוגריים נקבל:

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots \pm e_{n-1}x \mp e_n$$

הגדרה: פולינום ב-n משתנים $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ נקרא **סימטרי** אם לכל תמורה σ על המספרים $\{1, \dots, n\}$, מתקיים $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)$. במילים פשוטות, פולינום סימטרי מחזיר אותו ערך כאשר משנים את סדר הקלטים.

1. יהי $Q(t_1, \dots, t_n)$ פולינום כלשהו (לא בהכרח סימטרי). הוכיחו כי $Q\left(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\right)$ סימטרי.
2. יהי $P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ פולינום סימטרי ב-$n+1$ משתנים. נגדיר פולינום חדש ב-n משתנים $P_0(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, ., , , x_n, 0)$. הוכיחו כי P_0 סימטרי.
3. נניח שקיים Q עבורו $P_0(x_1, \dots, x_n) = Q\left(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\right)$ בסעיף הקודם. הוכיחו כי הפולינום
$$P - Q\left(e_1^{(n+1)}, \dots, e_n^{(n+1)}\right)$$
מתחלק ב-x_{n+1}.
4. הוכיחו שהפולינום לעיל מתחלק למעשה ב- $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = e_{n+1}^{(n+1)}$.
5. הוכיחו באינדוקציה שכל פולינום סימטרי ב-n משתנים הוא מהצורה $Q(e_1, \dots, e_n)$.

מזל טוב! כמעט הוכחנו את המשפט היסודי של הפולינומים הסימטריים. המשפט המלא אומר שלכל פולינום סימטרי יש הצגה *יחידה* בתור פולינום ב-e_i, ואפשר להוכיח גם את זה באינדוקציה.

למעשה לא רק הוכחנו את הקיום של ההצגה הנ"ל, אלא קיבלנו גם אלגוריתם פרקטי למציאת ההצגה: בכדי למצוא את ההצגה הרצויה עבור פולינום נתון, ניתן לעקוב אחר שלבי ההוכחה.

הגדרה: נגדיר את פולינומי סכומי החזקות בתור $p_m^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_1^m + \cdots + x_n^m$ לכל $m \geq 1$. אלו הם כמובן פולינומים סימטריים, ולכן ניתן להביע אותם באמצעות e_i.

הוכיחו את הזהויות הבאות לכל $k \geq 1$:

1. $p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} - \cdots \pm e_{k-1} p_1 \mp k e_k = 0$ כאשר כולם עם k משתנים.
2. $p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} - \cdots \pm e_{k-1} p_1 \mp k e_k = 0$ כאשר כולם עם $n \geq k$ משתנים.
3. $p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} - \cdots \pm e_{n-1} p_{k-n+1} \mp e_n p_{k-n} = 0$ כשכולם עם $n \leq k$ משתנים.

<u>פולינומים סימטריים - תרגילים</u>

1. נתונים מספרים x, y, z המקיימים $xyz = 1$ וגם $x + y + z = xy + yz + zx$. הוכיחו שאחד מהמספרים שווה 1.

2. נתונים מספרים a, b, c, d המקיימים $a + b + c + d = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$. הוכיחו שסכומם של שניים מארבעת המספרים הוא 0.

3. שורשי הפולינום $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ הם u, v, w. מצאו פולינום ששורשיו הם u^2, v^2, w^2.

4. שורשי הפולינום $x^3 - x - 1 = 0$ הם α, β, γ. מצאו את הסכום $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

5. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

א.
$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} x^3 + y + z = 0 \\ x + y^3 + z = 0 \\ x + y + z^3 = 0 \end{cases}$$

6. מספר נקרא אלגברי אם הוא שורש של פולינום כלשהו במקדמים שלמים. הוכיחו שאם x, y אלגבריים, אז גם המספרים $x + y,\ x - y,\ xy,\ x/y$ הם אלגבריים.

בתיאבון!