תרגיל סיזיפי

1. סיזיפוס משחק משחק ברביע הראשון. הוא מתחיל עם ארבע אבנים שנמצאות ב-$(0,0)$. מתי שירצה, הוא יכול להוריד אבן מהמיקום ה-(i,j), ואז שתי אבנים מופיעות באופן קסום במקומות ה-$(i,j+1)$ וה-$(i+1,j)$. סיזיפוס צריך שבכל משבצת תהיה לכל היותר אבן אחת. האם יכול סיזיפוס להצליח במטרתו?

2. לאבנר יש טבלה $a \times a$, בה יש אבן בכל משבצת. בכל תור אבנר יכול לקחת אבן מהמשבצות ה-(n,i) וה-(m,k), כאשר $m > n, k < i$, ולהעביר אותן למיקומים ה(n,k) וה(m,i). הוכיחו כי אבנר יבצע כמות סופית של מהלכים, וכי כאשר לא יוכל לבצע עוד מהלכים, כל האבנים יהיו על האלכסון הראשי.

3. על לוח משבצות אינסופי, במשבצות של ריבוע $N \times N$ הוצבו N^2 אבנים. אבנר משחק מחשבת על הלוח: בכל מהלך ניתן לבחור את אחת האבנים, לקפוץ איתה מעל אבן סמוכה (לפי צלע) ולהוריד את האבן מעליה קפצו.
עבור אילו ערכי N אבנר יצליח להשאיר אבן בודדת על הלוח?

4. על אבן חרוטים הפולינומים $f = x^3 - 3x^2 + 5, g = x^2 - 4x$. אם חרוטים על האבן שני פולינומים a, b ניתן לחרוט עליה גם את כל אחד מבין הפולינומים $ab, a+b, a-b, a \circ b, c \cdot a$ עבור c קבוע ממשי. האם יכול להיות שעל האבן יחרט פולינום מהצורה $x^n - 1$, עבור $n > 0$?

5. בשורה נמצאות N אבנים, כל אחת במשקל שונה. כל דקה, מחלקים את האבנים לסדרות מקסימליות של אבנים רצופות שיורדות במשקלן, כלומר אם שתי אבנים רצופות לא באותה סדרה אז המשקל של השנייה גדול מזה של הראשונה. לאחר מכן, הופכים את הסדר של האבנים בכל אחת מהסדרות.
הוכיחו כי כעבור $N-1$ מהלכים האבנים יסודרו בסדר עולה לפי משקלן.

6. עלי באבא וארבעים השודדים מחלקים שלל. בהתחלה על השולחן יש 10 ערמות ובכל אחת 10 אבני חן. בכל שלב, עלי באבא בוחר 4 ערמות, מציב לידן 4 כוסות ומעביר חלק מאבני החן מהערימות לכוסות (לפחות אבן אחת מכל ערמה לכוס המתאימה אבל לא את כל הערמה). השודדים בתורם מסדרים את הכוסות מחדש כך שסידור הכוסות ישתנה ולאחר מכן שופכים את אבני החן מהכוסות לערמות המתאימות. לאחר כל איטרציה של הפעולות עלי באבא יכול להחליט שהחלוקה מוצלחת מבחינתו, לבחור 3 ערמות וללכת. כמה אבני חן יוכל עלי להשיג?

7. לסיזיפוס $\binom{n+1}{2}$ אבנים, הוא בוחר מספר טבעי k ומחלק את האבנים ל-k ערימות כרצונו. לאחר מכן, כל דקה, סיזיפוס לוקח אבן אחת מכל ערימה ומרכיב מהן ערימה חדשה. הוכיחו כי רצונו של סיזיפוס לא משנה, כלומר שלאחר כמות זמן סופית המצב של הערימות יתייצב למצב קבוע שלא תלוי בחלוקת האבנים ההתחלתית.

8. במישור יש N נקודות, אף 3 לא על ישר. כל דקה, יותם לוקח שני קטעים שנחתכים זה עם זה, AB, CD ומחליף אותם בקטעים AC, BD בהנחה שאף אחד מהם עוד לא בציור. הוכיחו כי יותם יכול לבצע לכל היותר $\frac{N^3}{4}$ מהלכים.

9. בכל קודקוד של מחומש משוכלל רשום מספר שלם, כך שסכום המספרים חיובי. יותם בכל תור בוחר קודקוד שהערך a בו שלילי, מוסיף את a לערכים בשני הקודקודים השכנים אליו, והופך את הסימן של a. האם יכול להיות שיותם ימשיך לבצע מהלכים לנצח?

10. לתומאס יש שורה של נורות באורך אי-זוגי. בהתחלה נורה אחת בדיוק דולקת. אם נורה כלשהי דולקת, תומאס יכול ללחוץ על כפתור שמתחתיה, על מנת לשנות את המצב של הנורות הסמוכות אבל לא של הנורה עצמה (מכבוי לדלוק או להפך). עבור איזה מיקום התחלתי של הנורה הדולקת תומאס יוכל להדליק את כל הנורות?

11. בארץ רחוקה יש n שבטים של טרולים. כל טרול מתחיל עם אבן אחת. הטרולים בארץ הרחוקה מתפללים לשני אלים, איילה וברווז. בכל שנה, על פי המסורת, איילה בוחרת מועצה של נציג אחד מכל שבט, ואז ברווז מחלק מחדש את האבנים של הטרולים האלו- הוא לא יכול להשאיר את המצב כמו שהיה.

איילה רוצה שבכל שבט יהיה טרול בלי אבנים בכלל, ואילו ברווז רוצה לעצור אותה. האם ברווז יכול להשיג את מטרתו כאשר יש:

1. $2n$ טרולים בכל שבט?
2. $2n-1$ טרולים בכל שבט?

12. על ציר המספרים בנקודה $x=0$ ממוקמות N אבנים. בכל תור, אבנר בוחר מספר טבעי q ו-$2q$ אבנים שנמצאות באותה הנקודה, ומזיז q מהן צעד ימינה ו-q צעד שמאלה. אבנר רוצה שאחת האבנים תגיע לנקודה $x=\frac{N}{10}$.

א. הוכיחו כי קיים C כך שבאמצעות CN^3 מהלכים אבנר יצליח להשיג את מטרתו.

ב*. הוכיחו כי קיים C כך שבפחות מ-CN^3 אבנר לא יצליח להשיג את מטרתו.

בתאבון!!!