מספרי סטירלינג מהסוג הראשון $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

א. תמורות של n איברים עם k מעגלים.

ב. תמורות של n איברים עם k שיאים.

ג. $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

ד. $\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

מספרי סטירלינג מהסוג השני $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

א. יחסי שקילות לקבוצה של n אברים עם k מחלקות שקילות.

ב. $\begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$.

ג. $k! \cdot \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \Delta^k \left(x^n\right)(0)$.

ד. $x^n = \sum_k \Delta^k \left(x^n\right)(0) \binom{x}{k} = \sum_k k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x}{k}$,

כאשר $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix}$$

חידה:

יהא n שלם חיובי. נתונים מאזני כף ו-n משקולות שמשקליהן $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. עלינו להניח את כל המשקולות על המאזניים בזו אחר זו, כך שהכף הימנית לעולם אינה כבדה יותר מהכף השמאלית. בכל צעד בוחרים משקולת שאינה על המאזניים, מניחים אותה על אחת הכפות, וממשיכים כך עד שכל המשקולות נמצאות על המאזניים.

מצא את מספר הדרכים השונות לבצע את המשימה.

זהויות

יחסי אורתוגונאליות $$\sum_k (-1)^{k+r} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop r} \right] = \delta_r^n$$

$$\left[{n+1 \atop k+1} \right] = \sum_\ell \left[{n \atop \ell} \right] \binom{\ell}{k}$$

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_\ell \left\{ {\ell \atop k} \right\} \binom{n}{\ell}$$

$$\left[{pn \atop k} \right] \equiv \begin{cases} \binom{n}{r} (-1)^{(n-r)} & k = (p-1)r + n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

$$\prod_{p-1|n-1} p = \gcd\left(\left\{ k! \left\{ {n \atop k} \right\} \,\middle|\, 2 \le k \le n \right\} \right)$$

נוסחת דובינסקי $$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} = B_n = \frac{1}{e} \sum_k \frac{k^n}{k!}$$

נסמן $S_n(k)$ את מספר התמורות על n מספרים עם בדיוק k נקודות שבת. הראו כי

$$\sum_k k \cdot S_n(k) = n!$$

$$\sum_k k^2 \cdot S_n(k) = 2 \cdot n!$$

$$\sum_k k^m \cdot S_n(k) = ? \cdot n!$$