שאריות ריבועיות

1. הלמה של $Thue$: יהי $n > 1$ שלם, לכל a שזר ל-n קיימים $0 < |x|, |y| < \sqrt{n}$ כך ש-$a \equiv \frac{x}{y} \; mod \; n$.

2. יהי p ראשוני שהוא 3 מוד 4. הוכיחו כי אם יש כפולה של p מהצורה $a^2 + 5b^2$, עבור a, b זרים ל-p, אזי גם $2p$ הוא מהצורה $a^2 + 5b^2$.

3. יהי $p > 3$ ראשוני ו-$\{q_1, q_2, \dots, q_{\frac{p-1}{2}}\}$ היא קבוצת כל השאריות הריבועיות מודולו p. האם קיימים a, b שלמים וזרים ל-p כך שהקבוצה $\{aq_1 + b, aq_2 + b, \dots, aq_{\frac{p-1}{2}} + b\}$ לא מכילה שאריות ריבועיות?

4. יהי $p \geq 7$ ראשוני. הוכיחו כי אחד מבין המספרים

$$p + 1, 2p + 1, 3p + 1, \dots, (p - 3)p + 1$$

ניתן להצגה כסכום של שני ריבועים.

5. יהי $p > 3$ ראשוני ויהיו $a \neq 0, b, c$ שלמים. ידוע שקיימים $2p - 1$ שלמים עוקבים עבורם $ax^2 + bx + c$ ריבוע שלם.
הוכיחו כי $b^2 - 4ac$ מתחלק ב-p.

6. יהי n שלם חיובי, מה היא כמות הפתרונות של המשוואה

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2nxyz$$

מודולו p?

7. יהי n שלם, הוכיחו שאם למשוואה

$$n = x^2 + xy + y^2$$

קיים פתרון ברציונליים אז יש לה פתרון גם בשלמים.

8. הוכיחו כי לא קיימים a, b, c שלמים עבורם

$$3(ab + ac + bc) | a^2 + b^2 + c^2$$

9. יהי p ראשוני אי-זוגי. נסמן $n = \frac{p-1}{2}$, מצאו את כל ה-n-יות $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv \ldots \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^n \ mod\ p$$

10. יהיו a, b, c שלמים חיוביים עבורם מתקיים ש-

$$\gcd(a, b) + lcm(a, b) = 2021^c .$$

אם ידוע ש-$|a - b|$ ראשוני, הוכיחו כי $(a + b)^2 + 4$ פריק.

11. יהי ראשוני p, חשבו את מכפלת כל השאריות x מודולו p כך שגם x וגם $x - 4$ אינן שאריות ריבועיות.

12. א. יהי p ראשוני, הוכיחו כי השארית הלא ריבועית הקטנה ביותר קטנה מ-$\sqrt{p} + 1$.

ב. בנוסף יהי n שלם חיובי. הוכיחו כי הקבוצה $\{n, n + 1, \dots, n + 2\lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1\}$ מכילה שארית לא ריבועית.

ג. יהי $p \equiv 1\ mod\ 4$ ראשוני. נסמן ב-X את כמות השאריות הלא ריבועיות מודולו p שלא עולות על $\sqrt{p}$. הוכיחו כי

$$\left|2X - \sqrt{p}\right| \leq \sqrt{\frac{p + 1}{2}}$$

בתאבון!