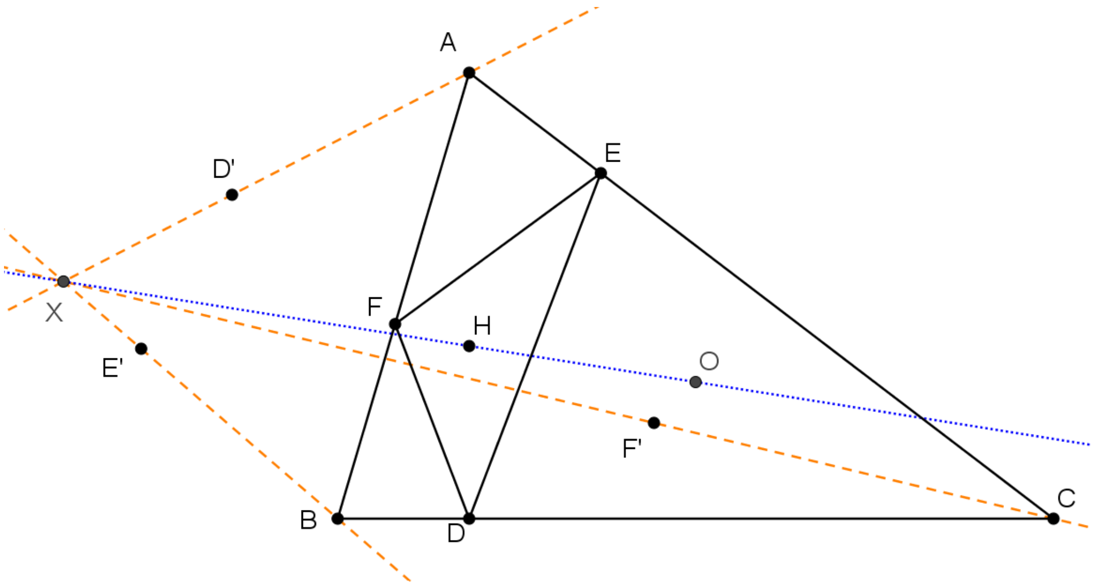
תרגיל שלבים.

שאלה 1.

יהי ABC משולש, נסמן ב-D,E,F את עקבי הגבהים. השיקוף של D ביחס ל-EF יסומן ב-D'. באופן דומה נגדיר E',F'. הוכיחו כי $D'E'F'$ ו-ABC פרספקטיביים.

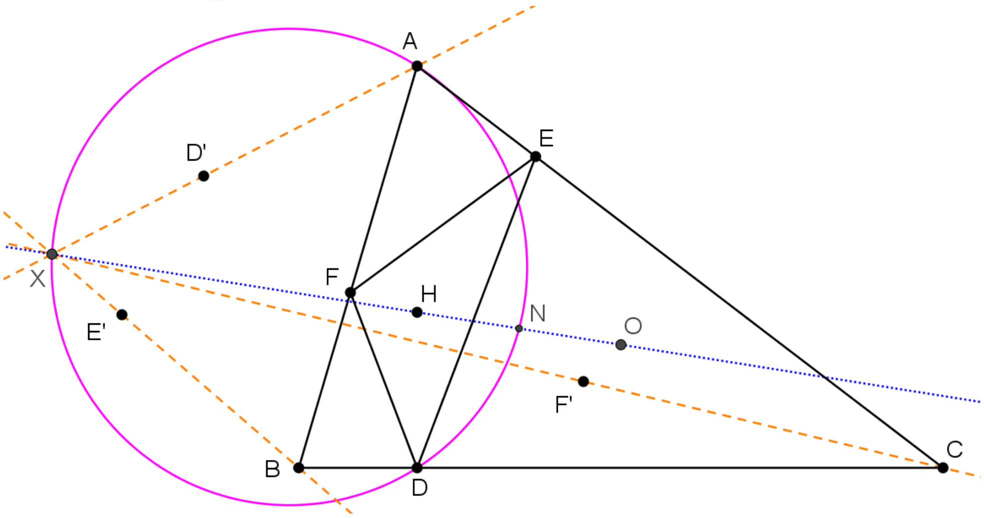
<u>פתרון:</u> נסמן ב-X הנקודה האינוורסית ל-H ביחס למעגל החוסם. נראה ש-A,D',X על ישר וזה יסיים את השאלה.



<u>טענה 1:</u> $XNDA$ מעגל כאשר N היא מרכז מעגל 9 הנקודות.

הוכחה:

$$NH\cdot HX=\frac{1}{2}OH\cdot HX=\frac{1}{2}OH\cdot(OH-OX)=\frac{1}{2}(OH^2-OH\cdot OX)$$
$$=\frac{1}{2}pow\big(H,(ABC)\big)=AH\cdot HD$$

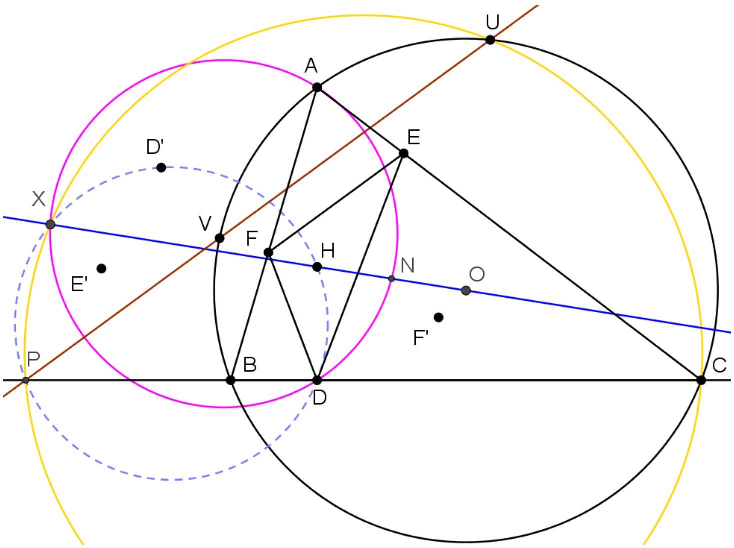


נסמן ב-U,V את השיקופים של H ביחס ל-AC,AB נשים לב ש-X זו נקודת מיקל במרובע $BCUV$ הרי היא הנקודה האינוורסית לנקודת חיתוך האלכסונים. נסמן ב-P את החיתוך של UV עם BC ונסיק ש-$PXUC$ מעגל.

<u>טענה 2:</u> $PDHXD'$ מעגל.

הוכחה:

$$\angle XPD=\angle XUC=\angle XUO+\angle OUC=\angle OHU+\angle BHD=\angle XHD$$



בשביל לסיים את השאלה נשאר לעשות חשבון זוויות קטן:

$$\angle NXA=\angle NDA=\angle ADD'=\angle HXD'$$

<u>פתרון שני לשאלה:</u>

נזכיר כי עקום נויברג הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות X כך XX^* מקביל לישר אוילר של המשולש ABC, כאשר X^* היא הנקודה הצמודה איזוגונלית ל-X ביחס למשולש ABC. ניתן להוכיח שמקום גיאומטרי זה ממעלה 3 (בקואורדינטות טרילינאריות רואים זאת די קלות). אנחנו נניח שהעקום יוצא עקום אליפטי (כלומר לא מנוון) ונתעלם ממקרי קצה מנוונים שנובעים מטיעוני רציפות.

נתבונן בעקום נויברג של משולש DEF, קל לראות שהנקודות $D,E,F,A,B,C,H_{DEF},N,I,J,\infty_{HN},D',E',F'$ נמצאות על העקום.

נסמן ב-X את נקודה החיתוך השלישית של הישר AD' עם העקום שלנו. מתקיים ש-

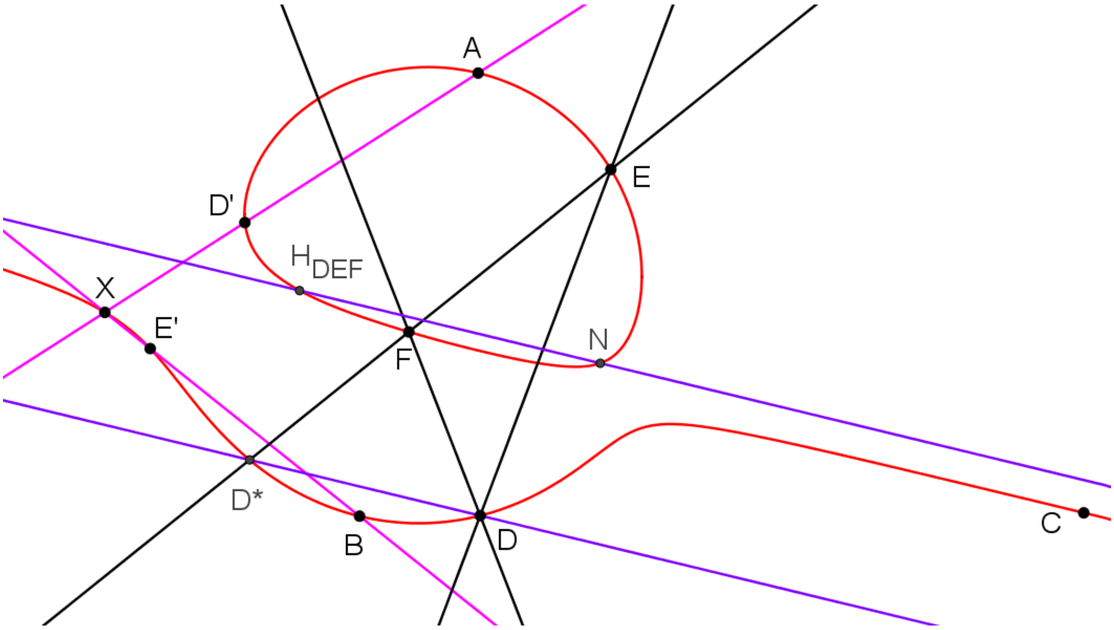
$$D+D'+H_{DEF}=0$$

$$A+D+H=0$$

$$A+D'+X=0$$

$$X=-A-D'=D+H+D+H_{DEF}$$

אם נגדיר את הנקודה X' בתור החיתוך השלישי של BE' עם העקום שלנו, נקבל ש-X' מקיימת $X' = 2E + H + H_{DEF}$ לכן אם נוכיח ש-$2D = 2E$ נסיים את השאלה.



נטען ש-$-2D$ זו נקודת חיתוך השישית והאחרונה של עקום נויבר והמעגל החוסם (אנחנו כבר מכירים את חמשת נקודות החיתוך D, E, F, I, J) וזה ינצח. נקודה זו כמובן חייבת להיות הנקודה הצמודה איזוגונלית של ∞_{HN}, כלומר אנחנו רוצים להראות ש-$-2D = \infty_{HN}^*$. נסמן ב-D^* את נקודת החיתוך השלישית של עקום נויברג עם הישר EF, D^* היא "הצמודה" איזוגונלית של D כלומר מתקיים ש-

$$D + D^* + \infty_{HN} = 0$$

$$E + F + D^* = 0$$

ולכן

$$E + F = D + \infty_{HN}$$

אבל

$$D + E + F + I + J + \infty_{HN}^* = 0$$

ו-

$$I + J + \infty_{HN} = 0$$

ולכן

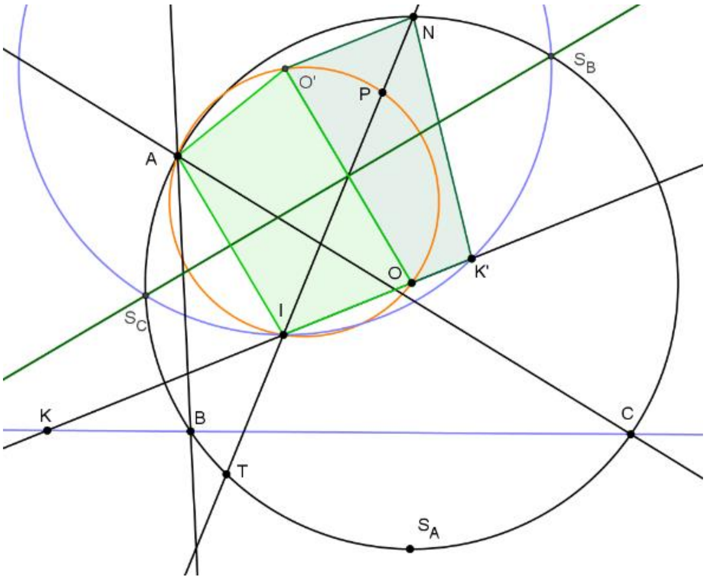
$$2D + \infty_{HN}^* = 0$$

כרצוי.

שאלה 2.

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O וחוסם מעגל שמרכזו I. מעגל BOC נחתך שנית עם הישרים AB, AC ב-U, V בהתאמה. הישרים BC, UV נחתכים בנקודה D. המעגל החצי חסום מול A משיק למעגל החוסם של המשולש בנקודה-T. השיקוף של A ביחס ל-BC יסומן A'. הישרים BC, OI נחתכים בנקודה K. על הישר $A'I$ נבחרה נקודה L ככה ש-$\angle ALO = \angle ITK$. L' זו הנקודה הצמודה איזוגונלית ל-L ביחס ל-ABC. הישר LL' נחתך עם הישרים AO, BC בנקודות X, Y בהתאמה.

הוכיחו כי A, D, X, Y מעגל!



תקציר הפתרון:

<u>טענה 1:</u> A, I, O, L נמצאות על מעגל אחד.

הוכחה: נסמן ב-S_A, S_B, S_C את אמצעי הקשתות במעגל החוסם. נבצע אינוורסיה ב-I ששומרת על המעגל החוסם. K תעבור ל-K' שהיא החיתוך של OI עם המעגל $S_B S_C I$, נסמן ב-O' את מרכז מעגל זה. O, O' סימטריות ביחס לאמצע $S_B S_C$ וכך גם I, N ולכן $OIO'N$ מקבילית, בנוסף $ON = O'K'$ ולכן $OK'NO'$ טרפשו"ש ולכן

$$\angle ALO = \angle ITK = \angle IK'N = \angle AO'O$$

ולכן $AO'LO$ מעגל אבל $AO'II$ טרפשוש (ברור משיקוף ביחס ל-$S_B S_C$) ולכן גם I על מעגל זה.

<u>טענה 2:</u> L על עקום נוייברג.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב-A^* את הנקודה הצמודה איזוגונלית ל-A' ונסתכל על שלושת העקומים האליפטיים:

$$\overline{A'A^*\infty_{OH}} \times (AIO\mathcal{I}\mathcal{J})$$

$$\overline{IA'} \times \overline{\mathcal{I}\mathcal{J}\infty_{OH}} \times \overline{AA^*O}$$

ועקום נויברג. הם נחתכים ב-$A, I, O, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \infty_{OH}, A', A^*$ ולכן נחתכים גם ב-$A'I$ עם המעגל AIO.

<u>הוכחה אלטרנטיבית ללמה 2</u> (יותר מסורבלת, פחות רמאית ומבינה יותר דברים על הציור, הולכים להשתמש בשאלה 1!):

נשתמש בהגדרה אחרת של עקום נויברג; עקום נויבר הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות X שהשיקופים של X ביחס לצלעות של ABC יוצרים משולש שהוא פרספקטיבי ל-ABC. ניתן להוכיח שזו הגדרה שקולה באופן הבא: מוכיחים שמקום גיאומטרי זה הוא

ממעלה 3 ואז מראים שיש לפחות 10 נקודות משותפות עם העקום שקיבלנו בהגדרה האחרת.

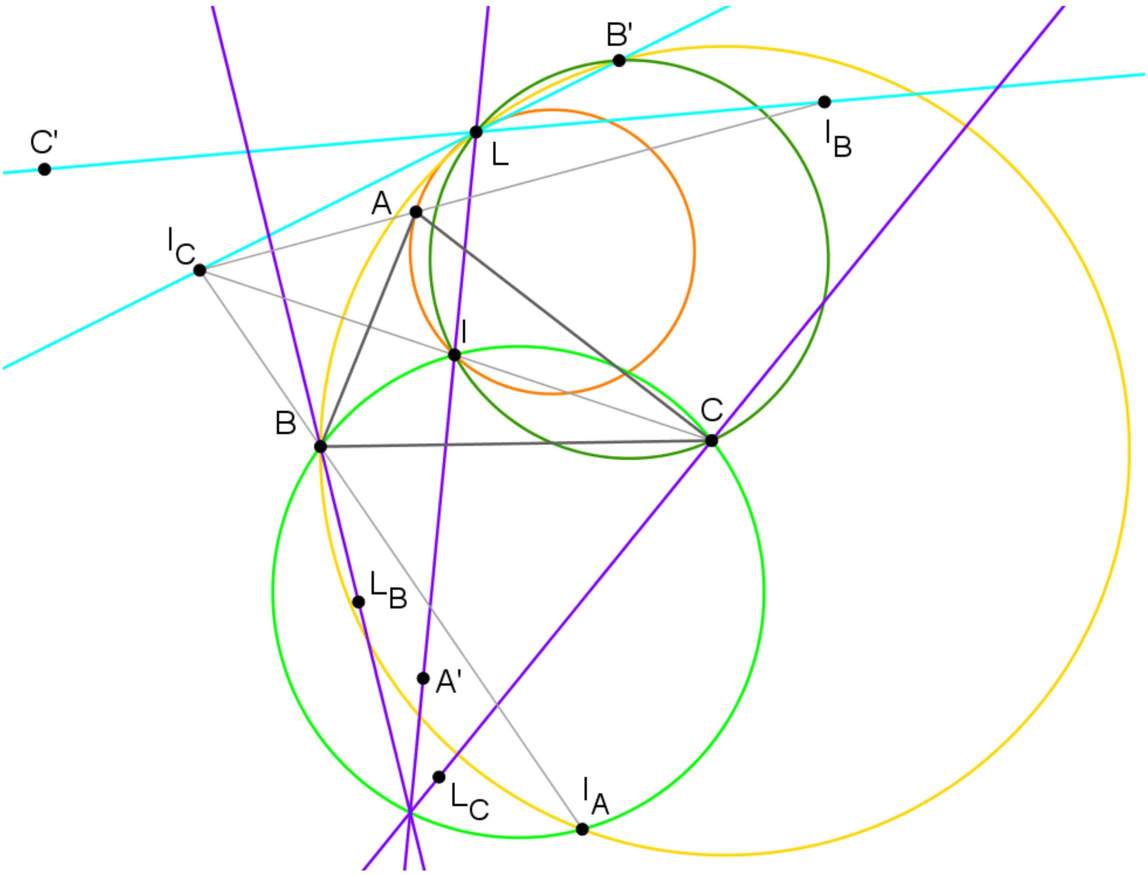
נסמן ב-L_1, L_2, L_3 את השיקופים של L ביחס ל-BC, AC, AB. נשקף את כל הציור ביחס ל-BC ונקבל שבשביל להוכיח ש-L על עקום נויבר עלינו להראות ש-$A'L, BL_B, CL_C$ נפגשים בנקודה, כאשר L_B, L_C הם השיקופים של L_2, L_3 ביחס ל-BC.

נסמן ב-I_A, I_B, I_C את מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ במשולש ABC וב-B', C' את השיקופים של B, C ביחס ל-AC, AB בהתאמה.
נפעיל את שאלה 1 על המשולש II_BI_C ונקבל ש-$A'I, B'I_C, C'I_B$ נפגשים בנקודה.

מטענה 2 של השאלה ראושנה נובע ש-$BI_AB'L$ מעגל. בנוסף BI_ACI חסום במעגל התלתן ולכן מדרגת נקודה מ-I_C נסיק ש-$ICB'L$ מעגל. לפיכך נקבל ש-

$$\angle CIA' = \angle CB'L = \angle CBL_B$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהרכבה של שני שיקופים. משוויון הזוויות שקיבלנו נובע ש-IA' ו-CL_B נפגשים בנקודה על מעגל BIC, משיקול סימטרי נסיק ש-IA' ו-CL_C נפגשים על מעגל התלתן ולכן CL_C, BL_B, IA' נפגשים בנקודה כנדרש.



<u>סיום:</u>

$$\angle AXY = \angle AOH = \angle(\perp AO, \perp OH) \stackrel{?}{=} \angle(BC, AD)$$

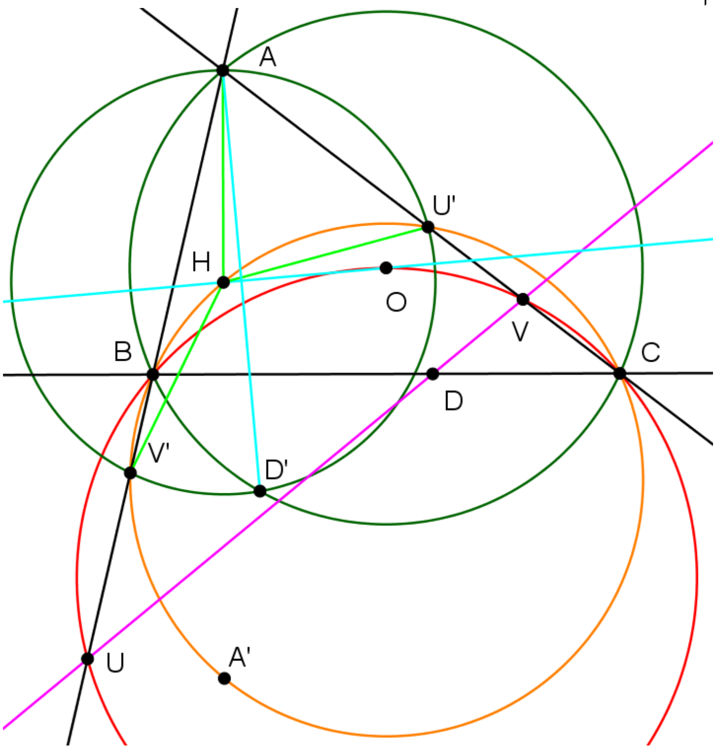
אם נשקף ביחס לחוצה זווית של A את $\perp AO$ נקבל את BC ולכן מספיק להוכיח ש-AD משתף ל-$\perp OH$.

נבצע אינוורשיקוף ב-A. U', V' זה החיתוכים של BHC עם AC, AB.

נשים לב ש-

$$\angle HU'A = \angle HBC = \angle HAC$$

ולכן $HA = HU'$ ובאופן דומה גם $HA = HV'$ ולכן H היא מרכז המעגל החוסם של $AU'V'$.
באינוורסיה D עוברת לחיתוך של $AU'V'$ עם ABC שזו בדיוק השיקוף של A ביחס ל-OH וזה בדיוק מה שרצינו.



<u>סיום אלטרנטיבי:</u>

נשים לב ש-

$$\angle BVC = \angle BOC = 2\alpha$$

ולכן VO הוא האנך האמצעי של AB, באופן דומה גם UO הוא האנך האמצעי של AC ולכן O הוא מפגש הגבהים ב-AUV. נסמן ב-E, F את עקבי האנכים מ-A ל-UV, BC בהתאמה. קיימת הומוטתשיקוף עם מרכז ב-A שמעבירה את BC ל-UV, היא תעביר את H ל-O ואת E ל-F ולכן $OH||EF$ ונשאר טיפה חשבון:

$$\angle AXY = \angle AOH = \angle AEF = \angle ADF$$