1. פתרו את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} a^2b=c \\ b^2c=a \\ c^2a=b \end{cases}.$$

תשובה. $(0,0,0),(1,1,1),(-1,-1,-1)$**.**

פתרון. אם c שווה ל-0, אז משני המשוואות האחרונות נובע שגם $a=0=b$. זה פתרון אפשרי. באופן דומה, אם אחד המשתנים שווה ל-0, אז גם שני האחרים. נשים את התשובה האפשרית $a=b=c=0$ בצד, ומרגע זה נניח שכל המשתנים שונים מ-0.

נכפיל את שתי המשוואות הראשונות ונקבל $a^2b^3c=ac$. בהנחה שהמשתנים שונים מ-0, ניתן לקזז ולקבל $ab^3=1$.

לכן אם $|a|<1$ אז $|b|>1$, ואם $|a|>1$ אז $|b|<1$. מסימטריה, דבר דומה ניתן להגיד על כל שני משתנים – אם אחד מהם קטן מ-1 בערך המוחלט, השני גדול מ-1 ולהפך.

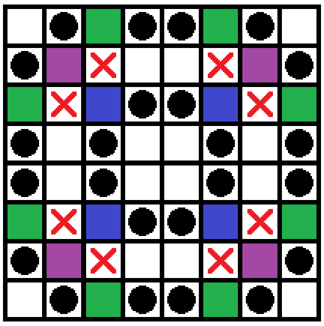
לכן לא יתכן כי יש שני משתנים בערך המוחלט גדולים מ-1 ושניים קטנים מ-1, אז לפחות אחד מהם שווה ל-1. אבל לפי המשוואה $ab^3=1$, אם $|b|=1$ אז $|a|=1$, ובאופן דומה אם $|a|=1$ אז $|c|=1$, ואם $|c|=1$ אז $|b|=1$. לכן אם משתנה אחד שווה ל-1 בערך מוחלט, אז כולם ככה.

בנוסף מהמשוואה $ab^3=1$ רואים כי a ו-b בעלי סימן זהה. באופן דומה, כל שני משתנים הם בעלי סימן זהה.

לכן האופציות היחידות הן $(1,1,1)$ ו-$(-1,-1,-1)$. קל לראות ששתי התשובות הללו מקיימות את כל המשוואות הנתונות.

2. לדניאל יש לוח שחמט (8×8). דניאל מניח אבנים על חלק מהמשבצות, כך שלכל משבצת בלוח יש בדיוק שתי משבצות שכנות לה (לפי צלע) שמונחת עליהן אבן. מה הוא המספר הגדול ביותר האפשרי והמספר הקטן ביותר האפשרי של אבנים שדניאל יכול להניח?

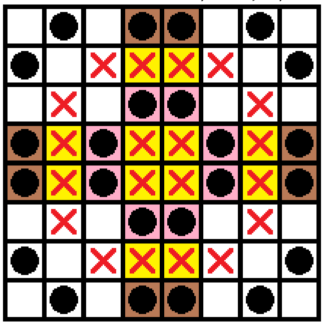
פתרון ראשון. ליד משבצת פינתית צריכים להיות שני אבנים.



לכן ליד על משבצת בצבע סגול בציור כבר יש שני אבנים, ושתי משבצות אחרות שנמצאות ליד משבצת סגולה חייבות להיות ריקות.

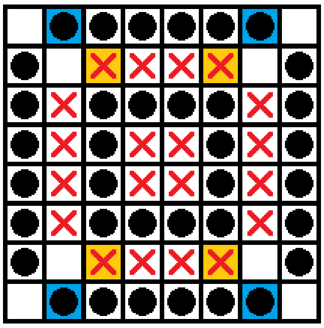
אבל ליד כל משבצת כחולה יש שני אבנים, על שניים מהמשבצות הללו כבר קבענו שהן ריקות, ועל שתי משבצות אחרות צריכות להיות אבנים.

ליד כל משבצת ירוקה בציור יש משבצת שכבר הוכחנו שהיא ריקה, לכן בכל המשבצות האחרות שלידה יש אבנים.

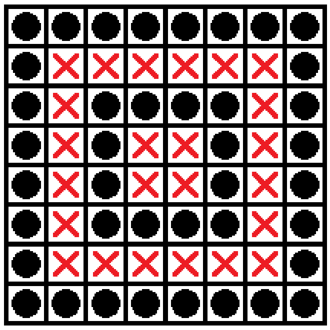


ליד כל משבצת צהובה כבר הוכחנו שיש שתי אבנים, לכן כל המשבצות האחרות שנמצאות ליד משבצת כזאת ריקות.

לכן כל המשבצות הצהובות ריקות. לכן ליד כל משבצת חומה או ורודה, בכל משבצת שלא צהובה חייבת להיות אבן.

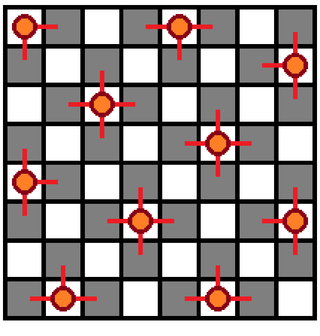


לכן ליד כל משבצת כתומה יש כבר שתי אבנים, ולכן גם משבצות שנמצאות באלכסון מפינה ריקות.



אבל גם ליד כל משבצת תכלת יש שני אבנים, לכן גם בפינות יש אבנים.

ובכן, הצלחנו להוכיח לגבי כל משבצת, האם יש בה אבן או לו. מצב זה עומד בכל התנאים, והוא יחיד שכזה, ויש כאן 40 אבנים.



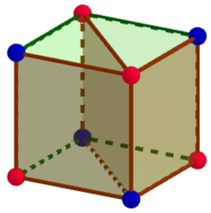
פתרון שני. נשתמש בצביעת שח. אנחנו נוכיח שעל משבצות שחורות יש 20 אבנים, באופן דומה ניתן להוכיח שעל משבצות שחורות יש 20 אבנים.

בציור מסומנות 10 משבצות לבנות, כאשר כל משבצת שחורה סמוכה למשבצת מסומנת אחת בדיוק. מכיוון שליד כל משבצת מסומנת יש שתי אבנים, אז סה"כ ש 20 אבנים.

3. לקובי יש קובייה. על כל קודקוד של הקובייה רשום מספר שלם וחיובי. קובי גילה שלכל ארבעה קודקודים שנמצאים על אותו מישור, סכום המספרים שרשומים עליהם הוא 10. מה יכולה להיות מכפלת המספרים על כל קודקודי הקובייה?

תשובה. $4^4 = 256$ או $6^4 = 1296$.

פתרון. נעביר 3 מישורים דרך מקצוע מסוים, שכל אחד מהם עובר גם במקצוע נוסף שמקביל למקצוע זה (שני פאות ומישור אלכסוני). אם סכום בכל אחד מהמישורים אלה זהה, סכום בשלושת המקצועות המקבילים זהה. באופן דומה סכום בכל שני מקצועות מקבילים זהה. אבל כל שני מקצועות מקבילים כאלה יוצרים מישור, לכן סכומם 10, לכן בכל מקצוע יש סכום 5.



ניתן לצבוע את קודקודי הקוביה בשני צבעים, אדום וכחול, כך שכל מקצוע מחבר קודקודים בצבעים הפוכים. אז אם בקודקוד כחול רשום מספר a, בכל קודקוד אדום $5-a$ ובכל קודקוד כחול שלידם a וכך הלאה, לכן יש שני מספרים, a ו-$5-a$, אחד רשום בכל הקודקודים הכחולים והשני בכל הקודקודים האדומים. מכיוון שאלה מספרים שלמים חיוביים, אז a ו-$5-a$ יכולים להיות או 1 ו-4, או 2 ו-3 (אולי בסדר הפוך).

מכיוון שיש 4 קודקודים מכל צבע, מקבלים $2^4\cdot 3^4$, או $1^4\cdot 4^4$.

קל לראות, שבמצבים האלה כל התנאים מתקיימים, כי כל מישור שמכיל 4 נקודות מכיל 2 נקודות מכל צבע.

4. מצאו את כמות הרביעיות של שלמים חיוביים כך שמתקיים $\begin{cases} m\cdot i=n\cdot k \\ m+i+n+k=2019 \end{cases}$.

תשובה. 2688.

פתרון. את התנאי $m\cdot i=n\cdot k$ אפשר לפרש גם כך: קיימים מספרים טבעיים a,b,c,d עבורם $m=ab,\quad i=cd,\quad n=ac,\quad k=bd$.

אז את המשוואה השנייה ניתן לשכתב בצורה

$$(a+d)(b+c)=m+i+n+k=2019.$$

אבל $2019=3\cdot 673$, כאשר 3 ו-673 הם מספרים ראשוניים. לכן הגורמים במכפלה

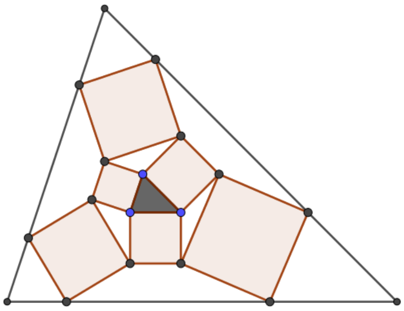
הם 3 ו-673 בסדר מסוים.

כל גורם הוא ראשוני, ולכן b זר ל-c (לו הם לא היו זרים, סכומם היה פריק). לכן ניתן להגדיר את a בתור המחלק המשותף המרבי של b ושל c.

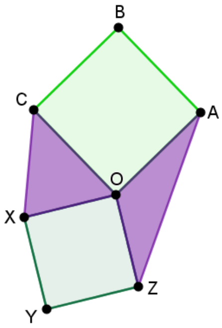
כלומר בהינתן m,i,n,k המספר a מוגדר ביחידות, ולכן גם b ו-c מוגדרים ביחידות, ולכן גם d מוגדר ביחידות. לכן במקום לספור את הרביעיות m,i,n,k אפשר לספור רביעיות a,b,c,d.

אם בחרנו את סדר הגורמים $a+d=3$, $b+c=673$ אז יש 2 אופציות עבור a וזה קובע את d ביחידות, ויש 672 אופציות עבור b וזה קובע את c ביחידות, לכן יש $2\cdot 672$ אפשרויות. אם קבענו הפוך: $a+d=673$, $b+c=3$ אז זה הפוך, אבל המכפלה היא אותו הדבר. לכן יש בסופו של דבר $2\cdot 2\cdot 672=2\cdot 1344=2688$ אפשרויות.

5. על צלעות המשולש ABC נבנו כלפי חוץ ריבועים ABPQ, BCRS, CALK. על צלעות המשושה PQLKRS נבנו כלפי חוץ ריבועים QLIJ, SPMN, KRUV. הישרים MJ, UN, IV יוצרים משולש. הראו כי משולש זה דומה למשולש המקורי ABC.

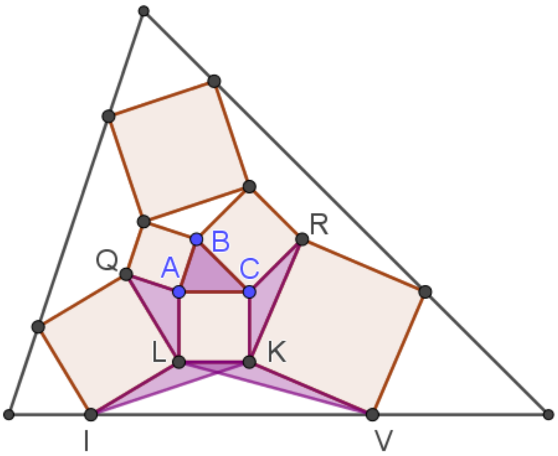


פתרון. אנחנו צריכים טענה



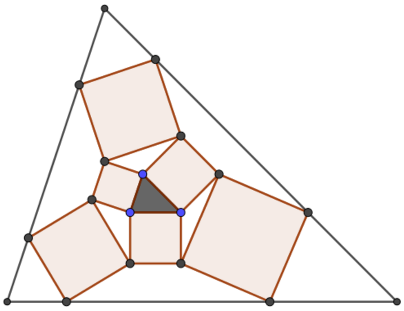
טענה. נניח כי לשני ריבועים OABC, OXYZ הנקודה המשותפת היחידה היא O, והמשולשים OAZ ו-OXC לא נחתכים עם הריבועים. אזי $S_{\text{OAZ}} = S_{\text{OXC}}$.

הוכחת הטענה. ניתן בעזרת סיבוב ב- 90° סביב O להעביר את הנקודה A לנקודה C. סיבוב זה יעביר משולש OAZ למשולש OCT, והרי $\text{XO} = \text{ZO} = \text{OT}$. לכן במשולש CXT הקטע XO הוא תיכון, לכן הוא חוצה את שטחו, לכן $S_{\text{OAZ}} = S_{\text{OCT}} = S_{\text{OXC}}$.



באמצעות שימוש חוזר בטענה, מקבלים שכל המשולשים הסגולים שווי-שטח
$S_{\text{LKV}} = S_{\text{CRK}} = S_{\text{ABC}} = S_{\text{ALQ}} = S_{\text{LKI}}$
לכן הנקודות I ו-V נמצאות במרחק שווה מהישר LK. כלומר IV מקביל ל-LK ומקביל ל-AC.
באופן דומה, כל צלע של המשולש הגדול מקבילה לצלע מתאימה של המשולש המקורי, ולכן המשולש הגדול דומה למשולש המקורי.

ב' בשבט תשע"ט **מבחן לרותם** 8/1/2019



1. על צלעות המשולש ABC נבנו כלפי חוץ ריבועים ABPQ, BCRS, CALK. על צלעות המשושה PQLKRS נבנו כלפי חוץ ריבועים QLIJ, SPMN, KRUV. הישרים MJ, UN, IV יוצרים משולש. הראו כי משולש זה דומה למשולש המקורי ABC.

פתרון. זהה לשאלה 5 בקבוצת ירדן.

2. נתבונן במספרים $1^{20}, 2^{19}, 3^{18}, \ldots, 19^{2}, 20^{1}$. האם ניתן לבחור שלושה מתוכם שסכומם הוא ריבוע שלם?

פתרון. $3^{18}+4^{17}+12^{9}=\left(3^{9}\right)^{2}+\left(2^{17}\right)^{2}+2\cdot 3^{9}\cdot 2^{17}=\left(3^{9}+2^{17}\right)^{2}$.

3. נתונים מספרים חיוביים a,b,c המקיימים $a+b+c\geq 3$. הראו כי

$$\frac{a}{a+2^{b-a}+2^{c-a}}+\frac{b}{2^{a-b}+b+2^{c-b}}+\frac{c}{2^{a-c}+2^{b-c}+c}\geq$$
$$\geq\frac{a}{a\cdot 2^{a-1}+2^{b-1}+2^{c-1}}+\frac{b}{2^{a-1}+b\cdot 2^{b-1}+2^{c-1}}+\frac{c}{2^{a-1}+2^{b-1}+c\cdot 2^{c-1}}$$

פתרון. ברישום שקול $\sum_{cyc}\frac{a\cdot 2^{a}}{a\cdot 2^{a}+2^{b}+2^{c}}\geq\sum_{cyc}\frac{a\cdot 2}{a\cdot 2^{a}+2^{b}+2^{c}}$

$$\sum_{cyc}\frac{a\cdot\left(2^{a}-2\right)}{a\cdot 2^{a}+2^{b}+2^{c}}\geq 0$$

$$\sum_{cyc}\frac{2^{a}-2}{2^{a}+\frac{2^{b}+2^{c}}{a}}\geq 0$$

מה יקרה אם נחליף מחובר בסכום זה במחובר מהצורה פשוטה יותר: $\frac{2^{a}-2}{2^{a}+2^{b}+2^{c}}$?

נפריד את התשובה לשני מקרים:

אם $a>1$ אז המחנה יגדל, והערך המוחלט של השבר יקטן. המונה חיובי, וכל השבר חיובי, לכן השבר יקטן.

אם $a<1$ אז המחנה יקטן, והערך המוחלט של השבר יגדל. המונה שלילי, וכל השבר שלילי, לכן אם נגדיל את הערך המוחלט, לכן השבר יקטן.

טכנית יש גם מקרה של $a=1$, אבל במקרה זה שום דבר לא משתנה (ואפשר לראות אותו כמקרה פרטי של כל אחד מבין שני המקרים). בכל מקרה השבר יקטן. לכן

$$\sum_{cyc}\frac{2^a-2}{2^a+\dfrac{2^b+2^c}{a}} \ge \sum_{cyc}\frac{2^a-2}{2^a+2^b+2^c} = \frac{2^a+2^b+2^c-6}{2^a+2^b+2^c} \ge 0$$

אכן, $2 = \sqrt[3]{2^3} \le \sqrt[3]{2^{a+b+c}} = \sqrt[3]{2^a\cdot 2^b\cdot 2^c} \le \frac{2^a+2^b+2^c}{3}$.

4. מצאו את המספר המרבי N של נקודות במישור, כך שכל 4 מהן מהוות קודקודים של מרובע ששטחו 1.

הבהרה. מרובע הוא קו שבור סגור שלא חותך את עצמו ומורכב מ-4 חלקים.

תשובה. 5.

פתרון. קל לראות דוגמה של 5 נקודות: הקודקודים של מחומש משוכלל. לא רק שכל המרובעים שנוצרים הם שווי-שטח, הם אפילו חופפים.

לגבי 6 נקודות, אנחנו נוכיח שאי-אפשר.

קודם כל, אם 6 נקודות יוצרות משושה קמור ABCDEF, אז המרובעים ABCD, ABCE, ABCF שווי שטח. לכן המשולשים ACD, ACE, ACF שווי שטח, ונקודות D, E, F נמצאות באותו צד של הישר AC, לכן הן על ישר אחד בניגוד להנחה שהוא קמור.

מקרה נוסף שנפסול מיד זה מקרה שיש מרובע קמור ABCD ובתוכו או על אחת הצלעות שלו נמצאת נקודה נוספת E. אז כל מרובע שקודקודיו A, B, C, E קטן בשטחו מהמרובע ABCD, בסטירה לנתון.

מכאן ניתן להסיק שבדוגמה שבה יש 6 נקודות, הקמור הוא משולש.

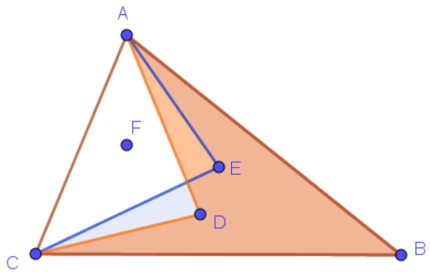
אכן, קיום של משושה קמור כבר נפסל קודם. אם הקמור הוא מרובע או מחומש, ניתן לבחור נקודה P שהיא בתוך הקמור. אחד המשולשים עם הקודקודים בקודקודי הקמור מכיל את הנקודה P, נוסיף לקודקודי המרובע עוד קודקוד של קמור ונקבל שיש לנו מרובע קמור ונקודה בתוכו, וזה המקרה השני שפסלנו.

ובכן, קמור של 6 הנקודות הנתונות זה משולש.

נגיד שקודקודי הקמור הם A, B, C ובתוך משולש ABC יש נתונות גם נקודות D, E, F. אז כאשר לוקחים קודקודים קמור עם נקודה פנימית נוספת, נגיד D, ניתן ליצור 3 מרובעים: ABCD, ABDC ו-ADBC, ועבור אחד מהם השטח 1.

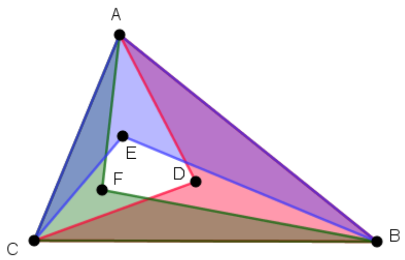
כלומר, לכל נקודה פנימית צריכים לבחור על איזה צלע של ABC מדלגים כשבונים מרובע, כשבוחרים את המרובע עם שטח יחידה. כשלב ראשון נוכיח, שעבור כל קודקוד צריכים לדלג על צלע אחרת.

נשים לב לעובדה מעניינת. אם ABCD מרובע קעור ששטחו 1, ו-D הקודקוד הקעור, הוא לא מכיל אף נקודה מסומנת אחרת. אם כן, נגיד E מוכל במרובע קעור ABCD, אז E נמצאת או בתוך המשולש BAD או בתוך המשולש BCD; המקרים האלה דומים, ובואו נניח שזה המקרה הראשון: E בתוך BAD.



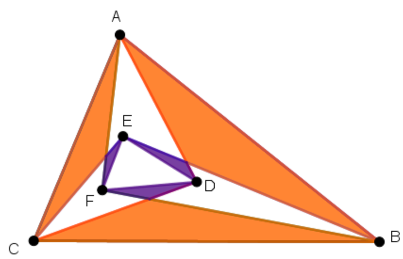
אז כל מרובע שקודקודיו B,A,D,E קטן בשטחו מ-1 כי הוא מוכל במשולש BAD שמוכל במרובע ABCD ששטחו 1.

נגיד שעבור נקודות D ו-E מדלגים על אותה צלע: נגיד על AC; במילים אחרות המרובעים ABCD ו-ABCE הם בעלי שטח 1. אם E נמצאת בתוך משולש ACD אז שטח של ABCE גדול ממש מ-1 כי הוא מכיל את ABCD ששטחו 1, וזו סתירה. במקרה האחר E נמצא במרובע הקעור ABCD, וזה לא יתכן כי הוכחנו.

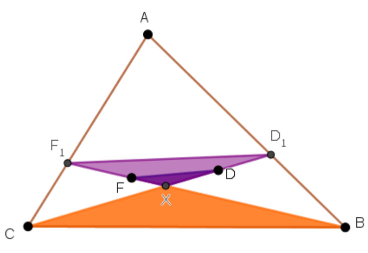


ובכן, עבור כל נקודה פנימית כאשר יוצרים משולש עם קודקודי הקמור, מדלגים על צלע שונה של הקמור. נגיד שהמרובעים ששטחם 1 הם ABCD, ABEC, AFBC. מרובעים אלה לא מכילים נקודות פנימיות נוספות, לכן המיקום שלהם הוא כמו בציור.

סכום שטחי המרובעים ABCD, ABEC, AFBC שווה ל-3, וכן גם סכום לסכום שטחי המרובעים הקמורים BCFD, CAEF, ABDE. לכן אם נחסיר שני ביטויים אלה, נקבל 0. אבל בעצם נקבל סכום של 3 משולשים כתומים פחות סכום של 3 משולשים סגולים בציור. אבל אנחנו נוכיח, שכל משולש כתום גדול מהמשולש הסגול הסמוך אליו.



נסמן את נקודת חיתוך הקטעים BF ו-CD ב-X. נמשיך את XD עד שיחתוך את AB בנקודה D_1, ונמשיך את XF עד שיחתוך את AC בנקודה F_1. אנחנו נוכיח שאפילו המשולש XD_1F_1 קטן בשטחו מהמשולש XBC, אבל הוא מכיל את XDF.



אם נוסיף לשני המשולשים את BXD_1 נקבל שזה כמו להשוות בין שטח המשולש BD_1C לשטח המשולש BD_1F_1, אבל אלה שני משולשים עם אותו בסיס BD_1 והגובה מ-C גדול יותר מאשר הגובה מ-F_1.