סדרות

1. תהי $a_1, a_2, \ldots$ סדרת ממשיים שמוגדרת על ידי $a_1 = 2$ ולכל $n \geq 1$:
$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1\,.$$
הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי:
$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{2^{2^n}}\,.$$

2. תהי $x_1, x_2, \ldots .$ סדרת ממשיים בקטע $(0,1)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$.
נגדיר סדרה $a_1, a_2, \ldots$ על ידי $a_1 = 1$ ולכל $i \geq 1$ נגדיר את a_{i+1} להיות הטבעי המינימלי m עבורו $\lfloor x_1 + x_2 + \cdots + x_m \rfloor = a_i$. הראו כי לכל $i, j \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{i+j} \geq a_i + a_j$.

3. תהי סדרת $a_1, a_2, \ldots$ ממשיים כך שלכל n טבעי מתקיים:
$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor (a_n - \lfloor a_n \rfloor) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
הוכיחו כי קיים $M > 0$ עבורו לכל $n > M$ מתקיים $a_{n+2} = a_n$.

4. נגדיר סדרה $a_0, a_1, \ldots$ וסדרה $b_0, b_1, \ldots$ על ידי $a_0 = 100, b_0 = 101$ וגם:
$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \qquad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}\,.$$
לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. מצאו את ה-$k$ השלם הקטן ביותר עבורו $a_k > 200$.

5. מצאו את כל השלמים $n \geq 3$ עבורם קיימת סדרת ממשיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ שלם מתקיים כי:
$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$
כאשר $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$.

6. יהי קבוע $C \in \mathbb{R}$. סדרת שלמים $a_1, a_2, \ldots$ תיקרא מופלאה אם לכל $n \geq 2$ מתקיים:
$$0 \leq a_{n-1} + C a_n + a_{n+1} < 1\,.$$
מצאו את כל האפשרויות עבור C כך שכל סדרה מופלאה וחסומה מלמטה, היא בהכרח מחזורית החל ממקום מסוים.

7. תהי $a_1, a_2, \ldots$ סדרה יורדת של ממשיים חיוביים, כך שלכל n טבעי מתקיים:
$$a_n \geq a_{2n} + a_{2n+1}\,.$$
הראו שקיימים אינסוף מספרים טבעיים m עבורם:
$$2m \cdot a_m > (4m - 3) \cdot a_{2m-1}\,.$$

8. תהי סדרה $a_1, a_2, \ldots$ של ממשיים חיוביים וגם $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ עבורו לכל $n > s$:

$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}$.

הוכיחו שקיים $l \leq s$ שלם חיובי ו-N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי:

$a_n = a_l + a_{n-l}$.

9. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עולה חלש, כך שלכל $x > y$ מתקיים:

$f(x) - f(y) < x - y$.

תהי סדרה $a_1, a_2, \ldots$ של ממשיים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$a_{n+2} = f(a_{n+1}) - f(a_n)$.

הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ עבורו לכל $n > M$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$.

10. תהי סדרה $b_0, b_1, \ldots$ של שלמים חיוביים, ונגדיר סדרה $a_0, a_1, \ldots$ על ידי $a_0 = 0, a_1 = 1$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n b_n + a_{n-1} & if\ b_{n-1} = 1 \\ a_n b_n - a_{n-1} & if\ b_{n-1} > 1 \end{cases}.$$

הראו כי לפחות אחד מבין a_{2017}, a_{2018} הוא לפחות 2017.

תסתדרו עם השאלות!