סדרות

1. מצאו את כל הסדרות העולות ממש של טבעיים כך ש-$a_1 = 1$ וגם:

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

2. a_n היא סדרה עולה ממש של טבעיים. הוכיחו כי קיים n יחיד עבורו:

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \le a_{n+1}$$

3. נתון n_0 טבעי ומספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ ו-$d_1, d_2, \ldots, d_k < n_0$ כך ש-$\gcd(d_1, d_2, \ldots, d_k) = 1$. לכל $n \ge n_0$ נגדיר:

$$a_n = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{n-d_i}}{k} \right\rfloor$$

הוכיחו כי הסדרה קבועה החל ממקום מסוים.

4. סדרת מספרים ממשיים מקיימת לכל $n > 2024$:

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j)$$

הוכיחו כי הסדרה חסומה.

5. נתונות סדרות של טבעיים $a_0, a_1, \ldots$ ו-$b_0, b_1, \ldots$ כך ש-$a_0, b_0 \ge 2$ וגם:

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, b_{n+1} = lcm(a_n, b_n) - 1$$

הוכיחו ש-a_n מחזורית החל ממקום מסוים.

6. קבעו האם קיימות שתי סדרות חסומות $a_1, a_2, \ldots$ ו-$b_1, b_2 \ldots$ כך שלכל $m > n$ טבעיים לפחות אחד מבין אי השוויונים הבאים מתקיים:

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}, |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

7. נתונים מספרים טבעיים $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2024}$. לכל $n > 2024$ נגדיר את a_n להיות המספר הטבעי המינימלי שגדול מ-a_{n-1} ולא ניתן לכתוב כ-$a_i + a_j$ עבור $1 \le i \le j < n$. נניח שיש בסדרה כמות סופית של מספרים זוגיים. הוכיחו כי הסדרה $a_{n+1} - a_n$ מחזורית החל ממקום מסוים.

8. קבעו האם קיימת סדרת מספרים שלמים שונים ... a_1, a_2 כך שלכל k מתקיים $a_{k^2} > 0, a_{k^2+k} < 0$ וגם לכל n מתקיים

$$|a_{n+1} - a_n| < 2024\sqrt{n}$$

9. צובעים את הטבעיים בכחול ואדום. נתונה סדרת טבעיים a_n המקיימת את התנאים הבאים:

- אם $m > n$ אז $a_m \ge a_n$
- לכל m, n, k הצבועים באותו צבע כך ש-$m + n = k$ מתקיים

$$a_m + a_n = a_k$$

הוכיחו שקיים $c > 0$ כך ש-$a_n \le cn$ לכל n.

10. $a_n \in (0,1)$ היא סדרה עולה של ממשיים. הוכיחו שיש מספר שמופיע בדיוק פעם אחת בסדרה:

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3} \dots$$