סדרות

1. סדרת המספרים מוגדרת על ידי $a_0=-1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k+1}=0$, לכל $n\geq 1$. הראו כי $a_n\geq 0$ לכל $n\geq 1$.

פתרון: אינדוקציה, בסיס ברור. צעד:

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k+1}=0$$

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{a_{n+1-k}}{k+1}=0$$

$$\begin{aligned}(n+2)a_{n+1}&=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\frac{n+1}{n+1-k}-\frac{n+2}{n+2-i}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot\frac{k}{(n+1-k)(n+2-k)}\end{aligned}$$

כל המחוברים חיוביים (a_0 בא עם מקדם 0).

2. נגדיר $a_0=1$, $a_1=2$, וגם $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$ לכל $n\geq 2$. מצאו גורם ראשוני אי-זוגי של a_{2015}.

פתרון: השורשים של $x^2-4x+1=0$ זה $2\pm\sqrt{3}$.

$$a_n=y\left(2+\sqrt{3}\right)^n+z\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

מציבים תנאי התחלה ומקבלים

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

טענה: עבור l אי-זוגי מתקיים ש-$a_k|a_{kl}$.

הוכחה: נסמן $\alpha=2+\sqrt{3},\overline{\alpha}=2-\sqrt{3}$. ברור ש-$\frac{a_{kl}}{a_k}$ רציונלי אבל בנוסף

$$\frac{a_{kl}}{a_k}=\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i+1}\alpha^{k(l-i)}\cdot\overline{\alpha}^{(i-1)k}$$

לכן הוא שלם אלגברי ולכן הוא גם שלם.

אם לא רוצים לקלל אז אפשר סתם להגיד שלכל n מתקיים ש-$\alpha^n+\overline{\alpha}^n$ שלם ולכן אם נסכום בזוגות נגדיים ונוציא $(\alpha\cdot\overline{\alpha})^{k(i-1)}$ מחוץ לסוגריים (שהוא גם שווה ל-1 בעצם) נקבל ש-

$$\frac{a_{kl}}{a_k} = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} \alpha^{k(l-i)} \cdot \overline{\alpha}^{(i-1)k} = \sum_{i=1}^{\frac{l-1}{2}} (-1)^{i+1} \cdot \left(\alpha^{k(l-2i+1)} + \overline{\alpha}^{k(l-2i+1)}\right)$$

שלם. נשאר חשבון, $a_5 = 2 \cdot 181$ ולכן $181|a_{2015}$.

3. נגדיר סדרות $(a_n), (b_n)$ באופן הבא: $a_1 = 1, b_1 = 2$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

הראו ש-$5 > a_{2022}$.

פתרון:

$$a_{n+1} + 1 = \frac{(a_n + 1)(b_n + 1)}{b_n}$$

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(a_{n+1} + 1)(b_{n+1} + 1)} = \frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{b_{n+1} + 1} = \frac{b_n - a_n}{(a_n + 1)(b_n + 1)}$$

$$\frac{1}{a_{2022} + 1} - \frac{1}{b_{2022} + 1} = \frac{a_{2022} - b_{2022}}{(a_{2022} + 1)(b_{2022} + 1)} = \frac{b_1 - a_1}{(a_1 + 1)(b_1 + 1)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a_{2022} + 1} > \frac{1}{6}$$

$$a_{2022} < 5$$

4. תהי a_n סדרת מספריים עבורה לכל i, j מתקיים ש-

$$|a_{i+j} - a_i - a_j| \leq 1$$

הוכיחו כי לכל i, j מתקיים אי השוויון

$$\left|\frac{a_i}{i} - \frac{a_j}{j}\right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

פתרון:

$$j - 1 \geq \sum_{k=1}^{j-1} |a_{i(k+1)} - a_{ki} - a_i| \geq |a_{ij} - ja_i|$$

$$i - 1 \geq |a_{ji} - ia_j|$$

$$|ja_i - ia_j| \leq |a_{ij} - ja_i| + |a_{ij} - ia_j| \leq i + j - 2$$

$$\left|\frac{a_i}{i} - \frac{a_j}{j}\right| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{i} - \frac{2}{ij} < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

5. נגדיר סדרה ע"י $a_1 = 2$,$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 8} - \sqrt{a_n + 3}$. הוכיחו כי

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n + 1$$

פתרון: הרעיון הוא להזיז דברים קרוב ל-0 ולהכפיל בצמוד.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 = \sqrt{a_n + 8} - \sqrt{a_n + 3} - 1 &= \sqrt{a_n + 8} - 3 - \left(\sqrt{a_n + 3} - 2\right) \\ &= \frac{a_n - 1}{\sqrt{a_n + 8} + 3} - \frac{a_n - 1}{\sqrt{a_n + 3} + 2} \\ &= (a_n - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_n + 8} + 3} - \frac{1}{\sqrt{a_n + 3} + 2}\right) \end{aligned}$$

ברור שגורם השני שלילי ולכן $a_n > 1$ אמ"ם $a_{n+1} < 1$.

בנוסף,

$$a_{n+1} + a_n - 2 = (a_n - 1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_n + 8} + 3} - \frac{1}{\sqrt{a_n + 3} + 2}\right)$$

והגורם השני בברור חיובי (מחסרים משהו קטן מ-1) אז $a_{n+1} + a_n < 2$ אמ"ם $a_n < 1$.

עכשיו מנצחים ממש בקלות באינדוקציה (צריך לעשות שני צעדים בהתאם לזוגיות).

6. נגדיר סדרה ע"י $a_1 = \frac{1}{2}$ ונסיגה $a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1 + (n+1)a_n}$ לכל $n \geq 1$. חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

פתרון: $na_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} + (n + 1)a_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{m} na_n - (n + 1)a_{n+1} = \frac{1}{2} - ma_m$$

נשים לב ש-$0 < na_n - (n + 1)a_{n+1} = \frac{na_n}{1+(n+1)a_n}$ ולכן na_n יורדת וחוסמה ולכן מתכנסת ל-l ומקיים

$$0 = \lim_{n\to\infty} na_n - (n + 1)a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{1 + (n + 1)a_n} = \frac{l}{1 + l}$$

ולכן $l = 0$ ולכן $\sum \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$.

7. נגדיר $a_0 = \frac{5}{2}$, וגם $a_k = a_{k-1}^2 - 2$ לכל $k \geq 1$. מצאו ביטוי קצר ל-$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$.

פתרון:

$$\begin{aligned} a_k + 1 = a_{k-1}^2 - 1 &= (a_{k-1} - 1)(a_{k-1} + 1) = \ldots \\ &= (a_{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_0 - 1) \cdot (a_o + 1) \end{aligned}$$

ומזה מקבלים נוסחה למכפלת $a_k - 1$.

$$a_k^2 = a_{k+1} + 2$$

ולכן אנחנו רוצים נוסחה למכפלה של $a_k + 2$-ים:

$$a_k - 2 = (a_{k-1} + 2)(a_{k-1} - 2) = (a_{k-1} + 2) \cdot \ldots \cdot (a_0 + 2)(a_0 - 2)$$

ועכשיו אפשר לחשב את ריבוע הביטוי שביקשו:

$$\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a_k - 1}{a_k}\right)^2 = \prod_{k=0}^{n} \frac{\frac{(a_{n+1}+1)^2}{(a_0+1)^2}}{\frac{a_{n+2}-2}{(a_0+2)(a_0-2)}} = \frac{(a_{n+1}+1)^2}{a_{n+1}^2 - 4} \cdot \frac{(a_0+2)(a_0-2)}{(a_0+1)^2}$$

כש-n שואף לאינסוף הגורם הראשון שואף ל-1 ולכן המכפלה שואפת לגורם השני שיוצא $\frac{9}{49}$ ואחרי שנוציא שורש חזרה נקבל $\frac{3}{7}$.

רעיון לפתרון אחר: אפשר להוכיח בקלות (נגיד באינדוקציה) ש-$a_n = 2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}}$ ואז החשבון די קל.

8. פונקציה $f:(0,1) \to (0,1)$ מוגדרת ע"י $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.
מספרים a ו-b מקיימים $0 < a < b < 1$. נגדיר סדרות a_n ו- b_n ע"י $a_0 = a, b_0 = b$ ונסיגה $a_n = f(a_{n-1}),\ b_n = f(b_{n-1})$ לכל $n > 0$. הראו שקיים $n > 0$ עבורו $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$.

פתרון: נניח ששתי הסדרות עולות ויורדות ביחד אז הן תמיד באותו החצי. נסתכל על ההפרש בין הסדרות, הוספת חצי כמובן לא משנה את ההפרש והעלה בריבוע מגדילה אותו (כי $a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)(a_n + b_n)$ ו-$a_n + b_n > 1$).

סיום ראשון: $a_n + b_n = a_n - b_n + 2b_n \geq a_0 - b_0 + 1$ ובסופו של דבר ההפרש יהיה גדול מ-1.

סיום שני: נסתכל על הרגע בו העלנו בריבוע וירדנו מתחת לחצי (כלומר $a_n, b_n > \frac{1}{2}, a_{n+1}, b_{n+1} < \frac{1}{2}$) אז $\frac{1}{4} < a_{n+1}$ ולכן $a_{n+2}, b_{n+2} > \frac{3}{4}$ כלומר הכפלנו לפחות פי 1.5 ועשינו את זה אינסוף פעמים אז ההפרש יהיה גדול מ-1.

9. יהי n טבעי, נגדיר $a_0 = \frac{1}{2}$ ו-$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$. הוכיחו כי $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

פתרון: שכתוב של הנתון

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{n}{n + a_{k-1}}$$

ועוד קצת שכתוב

$$\frac{1}{a_{k-1}} = \frac{1}{a_k} + \frac{a_{k-1}}{n a_k} = \frac{1}{a_k} + \frac{1}{n + a_{k-1}}$$

כלומר

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$$

ומסכום טלסקופי מקבלים ש-

$$\frac{1}{a_n} = 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + a_k}$$

נשאר להראות ש-$\frac{n-2}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k} < 1$. זה שהסכום קטן מ-1 זה סתם ברור כי כל איברי הסדרה חיוביים. בנוסף ברור שהסדרה עולה ולכן גם כל ה-a_k (עד n) בין 0 ל-1 ולכן

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + a_k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} > \frac{n - 2}{n - 1}$$

10. נגדיר סדרה $a_1 = 1$ ו-$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2n}{3a_n}$. הוכיחו כי $\sqrt{n-1} \leq a_n \leq \sqrt{n}$.

פתרון: נשים לב שעל הקטע $(\sqrt{n-1}, \sqrt{n})$ הפונקציה $\frac{x^2+2n}{3x}$ מונוטונית יורדת (גוזרים ורואים). נוכיח את השאלה באינדוקציה, בסיס ברור. צעד:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2n}{3a_n} \geq \frac{3n}{3\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2n}{3a_n} \leq \frac{3n - 1}{3\sqrt{n - 1}} = \sqrt{n + 1}\,\frac{3n - 1}{3\sqrt{n^2 - 1}} \leq \sqrt{n + 1}$$

בתאבון!