# סדרות

1. סדרת המספרים מוגדרת על ידי $a_0 = -1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$, לכל $n \geq 1$. הראו כי $a_n \geq 0$ לכל $n \geq 1$.

2. נגדיר $a_0 = 1, a_1 = 2$ וגם $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. מצאו גורם ראשוני אי-זוגי של $a_{2015}$.

3. נגדיר סדרות $(a_n), (b_n)$ באופן הבא: $a_1 = 1, b_1 = 2$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

הראו ש-$a_{2022} < 5$.

4. תהי $a_n$ סדרת מספריים עבורה לכל $i, j$ מתקיים ש-

$$|a_{i+j} - a_i - a_j| \leq 1$$

הוכיחו כי לכל $i, j$ מתקיים אי השוויון

$$\left|\frac{a_i}{i} - \frac{a_j}{j}\right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

5. נגדיר סדרה ע"י $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 8} - \sqrt{a_n + 3}$. הוכיחו כי

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n + 1$$

6. נגדיר סדרה ע"י $a_1 = \frac{1}{2}$ ונסיגה $a_{n+1} = \frac{n a_n^2}{1 + (n+1) a_n}$ לכל $n \geq 1$. חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

7. נגדיר $a_0 = \frac{5}{2}$, וגם $a_k = a_{k-1}^2 - 2$ לכל $k \geq 1$. מצאו ביטוי קצר ל- $\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$.

8. פונקציה $f: (0,1) \to (0,1)$ מוגדרת ע"י $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

מספרים $a$ ו-$b$ מקיימים $0 < a < b < 1$. נגדיר סדרות $a_n$ ו-$b_n$ ע"י $a_0 = a, b_0 = b$ ונסיגה $a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1})$. הראו שקיים $n > 0$ עבורו $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$.

9. יהי $n$ טבעי, נגדיר $a_0 = \frac{1}{2}$ ו-$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$. הוכיחו כי $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

10. נגדיר סדרה $a_1 = 1$ ו-$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2n}{3a_n}$. הוכיחו כי $\sqrt{n-1} \leq a_n \leq \sqrt{n}$.

11. תהי $a_1, a_2, a_3, \ldots$ סדרה של ממשיים חיוביים ו-$s$ שלם חיובי עבורו לכל $n > s$ מתקיים ש-

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}.$$

הוכיחו שקיים שלם חיובי $l \leq s$ ו-$N$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים ש-

$$a_n = a_l + a_{n-l}.$$