סדרות

1. נתון פולינום $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x + a_0$ שכל השורשים שלו ממשיים ו- $a_0 \neq 0$. הוכיחו כי לכל k או $a_k \neq 0$ או $a_{k+1} \neq 0$.

<u>פתרון:</u> $a_0 \neq 0$ ולכן כל השורשים של הפולינום שונים מ-0. נסמן את השורשים של p ב-$r_1, r_2, \ldots, r_n$. מנוסחאות ויאטה נקבל ש-

$$r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \left(\frac{1}{r_1}+\ldots+\frac{1}{r_n}\right) = a_1$$

$$r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\ldots+\frac{1}{r_1r_n}+\frac{1}{r_2r_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{r_{n-1}r_n}\right) = a_2$$

אם $a_1 = a_2 = 0$ אז נקבל ש-

$$\frac{1}{r_1}+\ldots+\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\ldots+\frac{1}{r_1r_n}+\frac{1}{r_2r_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{r_{n-1}r_n} = 0$$

ולכן

$$\frac{1}{r_1^2}+\ldots+\frac{1}{r_n^2} = \left(\frac{1}{r_1}+\ldots+\frac{1}{r_n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\ldots+\frac{1}{r_{n-1}r_n}\right) = 0$$

בסתירה לכך שהשורשים שונים מ-0.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. אם $a_1 \neq 0$ אז נגזור את הפולינום, נקבל פולינום ממעלה $n-1$ שכל השורשים שלו ממשיים (בין כל שני שורשים ממשיים של p יש שורש ממשי של p', וזה נכון גם לשורשים עם ריבוי) ולכן מהנחת האינדוקציה (תכנית צריך לחלק ב-$n-1$ בשביל לקבל פולינום מתוקן) נדע שמבין כל שני מקדמים עוקבים שלו לפחות אחד שונה מ-0 וניצחנו.
אם $a_1 = 0$ אז ממה שהוכחנו מקודם, $a_2 \neq 0$ ונוכל לגזור את הפולינום פעמיים וננצח באופן דומה למקרה הקודם.

2. נתונה הסדרה $a_n = n + \sqrt{2}$. בכל שלב ניתן לבצע את אחת הפעולות הבאות:

- לשכפל סדרה
- להוריד מספר איברים ראשונים מסדרה נתונה
- לסכום או להפריש שתי סרות
- להכפיל או לחלק שתי סדרות

האם ניתן להגיע לסדרה $b_n = n$?

<u>פתרון:</u> כל הסדרות שניתן לקבל הן מהצורה

$$\left\{\frac{P\left(n+\sqrt{2}\right)}{Q\left(n+\sqrt{2}\right)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

כאשר P, Q הם פולינומים עם מקדמים שלמים. אם הצלחנו להציג את הסדרה $\{n\}$ בצורה הזו אז נצליח כמובן להציג גם את הסדרה הקבועה $\sqrt{2}$ בצורה הזו אבל אם

$$\frac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})}=\sqrt{2}$$

אז נסתכל על n גדול מספיק ונסיק שהיחס בין המקדמים המובילים של P,Q הוא שורש 2 וזו סתירה.

3. תהי a_n סדרת מספריים עבורה לכל i,j מתקיים ש-

$$\left|a_{i+j}-a_i-a_j\right|\leq 1$$

הוכיחו כי לכל i,j מתקיים אי השוויון

$$\left|\frac{a_i}{i}-\frac{a_j}{j}\right|<\frac{1}{i}+\frac{1}{j}$$

<u>פתרון:</u>

$$j-1\geq\sum_{k=1}^{j-1}\left|a_{i(k+1)}-a_{ki}-a_i\right|\geq\left|a_{ij}-ja_i\right|$$

$$i-1\geq\left|a_{ji}-ia_j\right|$$

$$\left|ja_i-ia_j\right|\leq\left|a_{ij}-ja_i\right|+\left|a_{ij}-ia_j\right|\leq i+j-2$$

$$\left|\frac{a_i}{i}-\frac{a_j}{j}\right|\leq\frac{1}{j}+\frac{1}{i}-\frac{2}{ij}<\frac{1}{i}+\frac{1}{j}$$

4. יהיו $0<k<\frac{1}{2}$ ממשי ו-$0<a_0,b_0<1$ מספרים ממשיים. נגדיר סדרות a_n,b_n באופן הבא:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{2},\qquad b_{n+1}=b_n^k$$

הוכיחו כי עבור כל n גדול מספיק $a_n>b_n$ או שעבור כל n גדול מספיק $a_n<b_n$, והבינו איזה אי-שוויון נכון.

<u>פתרון:</u> נגדיר $A_n=1-a_n,B_n=1-b_n$. מתקיים ש-

$$A_{n+1}=1-a_{n+1}=1-\frac{a_n+1}{2}=\frac{1-a_n}{2}=\frac{A_n}{2}$$

כלומר קצב הדעיכה של A_n הוא של חזקת 2. אנחנו רוצים להבין כמה מהר B_n דועכת. לשם כך נחשב את המנה בין שני איברים עוקבים של B_n:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n}=\frac{1-b_n^k}{1-b_n}\leq\frac{1-(k(b_n-1)+1)}{1-b_n}=k<\frac{1}{2}$$

השתמשנו באי שוויון ברנולי: לכל $x>-1$ מתקיים ש-$(x+1)^n\geq nx+1$. קיבלנו שהמנה בין שני איברי B עוקבים קטנה מהמנה בין שני איברי A עוקבים ולכן הסדרה B קטנה מהר יותר ולכן עבור n מספיק מתקיים ש-$B_n<A_n$ כלומר $b_n>a_n$ עבור n גדול מספיק.

5. סדרת המספרים מוגדרת על ידי $a_0 = -1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$, לכל $n \geq 1$. הראו כי $a_n \geq 0$ לכל $n \geq 1$.

<u>פתרון:</u> אינדוקציה, בסיס ברור. צעד:

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$$

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_{n+1-k}}{k+1} = 0$$

$$(n+2)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{n+1}{n+1-k} - \frac{n+2}{n+2-i}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{k}{(n+1-k)(n+2-k)}$$

כל המחוברים חיוביים (a_0 בא עם מקדם 0).

6. פונקציה $f: (0,1) \to (0,1)$ מוגדרת ע"י $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. מספרים a ו-b מקיימים $0 < a < b < 1$. נגדיר סדרות a_n ו-b_n ע"י $a_0 = a, b_0 = b$ ונסיגה $a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1})$. הראו שקיים $n > 0$ עבורו $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$.

<u>פתרון:</u> נניח ששתי הסדרות עולות ויורדות ביחד אז הן תמיד באותו החצי. נסתכל על ההפרש בין הסדרות, הוספת חצי כמובן לא משנה את ההפרש והעלה בריבוע מגדילה אותו (כי $a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)(a_n + b_n)$ ו-$a_n + b_n > 1$).

סיום ראשון: $a_n + b_n = a_n - b_n + 2b_n \geq a_0 - b_0 + 1$ ובסופו של דבר ההפרש יהיה גדול מ-1.

סיום שני: נסתכל על הרגע בו העלנו בריבוע וירדנו מתחת לחצי (כלומר $a_n, b_n > \frac{1}{2}$, $a_{n+1}, b_{n+1} < \frac{1}{2}$) אז $\frac{1}{4} < a_{n+1}$ ולכן $a_{n+2}, b_{n+2} > \frac{3}{4}$ כלומר הכפלנו לפחות פי 1.5 ועשינו את זה אינסוף פעמים אז ההפרש יהיה גדול מ-1.

7. נגדיר סדרה באופן רקורסיבי, a_i יבחר להיות השלם עבורו $a_1 + \ldots + a_i$ הכי קרוב ל-$n\sqrt{2}$. האם הסדרה מחזורית?

<u>פתרון:</u> נסמן $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, ברור ש-$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \sqrt{2}$. נניח בשלילה שהסדרה מחזורית עם אורך מחזור t אז $S_{n+mt} = S_n + mk$ עבור k שלם כלשהו. מכאן נובע ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+mt}}{n+mt} = \frac{k}{t}$$

ולכן $\frac{k}{t}=\sqrt{2}$ בסתירה.

8. נגדיר סדרה באופן הבא: $0<a_1=x<1$ ו-$a_{n+1}=1-|1-2a_n|$. הוכיחו כי הסדרה מחזורית החל ממקום מסוים אם ורק אם x רציונלי.

<u>פתרון:</u> ל-a_{n+1} יש שתי אפשרויות, כתלות באם a_n מעל או מתחת לחצי נקבל ש-$a_{n+1}=2-2a_n$ או $a_{n+1}=2a_n$ בכל מקרה נקבל ש-$a_{n+k}=x+ya_n$ כאשר x,y שלמים. אם $a_{n+k}=a_n$ אז $a_n=\frac{x}{1-y}$ (ברור ש-$y\neq 1$ כי y זוגי) כלומר a_n רציונלי. אבל באופן דומה אפשר לבטא את a_1 באמצעות a_n: $a_1=u+va_n$ ולכן גם a_1 רציונלי.

בכיוון ההפוך: אם a_1 רציונלי אז כל איברי הסדרה רציונליים גם הם. יתר על כן, המכנה של כל איברי הסדרה הוא לכל היותר המכנה של a_1 ולכן לאיברי הסדרה יש כמות סופית של אפשרויות ולכן יהיו שני איברי סדרה זהים ומשם תתחיל מחזוריות.

9. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_1=a_2=1,$

$$a_n=\frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$$

הוכיחו כי כל אברי הסדרה שלמים.

<u>פתרון:</u> אחרי שכותבים קצת איברים ראשונים קל לנחש נוסחת נסיגה יותר מוצלחת

$$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$$

נוכיח אותה באינדוקציה

$$\begin{aligned} a_n=\frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}&=\frac{(4a_{n-2}-a_{n-3})^2+2}{a_{n-2}}=16a_{n-2}-8a_{n-3}+\frac{a_{n-3}^2+2}{a_{n-2}}\\ &=16a_{n-2}-8a_{n-3}+a_{n-4}=4(4a_{n-2}-a_{n-3})-(4a_{n-3}-a_{n-4})\\ &=4a_{n-1}-a_{n-2}\end{aligned}$$

10. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_1=1,$

$$a_n=a_{n-1}+\left\lfloor\sqrt{a_{n-1}}\right\rfloor$$

הוכיחו כי בסדרה מופיעים אינסוף ריבועים שלמים.

<u>פתרון:</u> בשביל הגרסה הראשונה מספיק לשים לב שאם $a_n=m^2+k$ אז

$$a_{n+2}=m^2+2m+k=(m+1)^2+k-1$$

וברור שבסוף אני אגיע שוב לריבוע.

בשביל הגרסה האחרת צריך להגיד שאם $a_n=m^2$ אז $a_{n+1}=m^2+m$ ויקח לסדרה עוד $2m$ צעדים לחזור לריבוע, בכל שני צעדים החלק הריבועי גדל ב-1 ולכן הריבוע הבא יהיה $(2m)^2$, בנוסף נובע שכל הריבועים בסדרה הם בדיוק חזקות 4.

11. נתונות שתי סדרות $\{a_n\},\{b_n\}$ המוגדרות באופן הבא:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}^2, \quad b_{n+2} = b_n^2 + b_{n+1}$$

ידוע ש-$a_1, b_1, a_2, b_2 > 1$, הוכיחו כי קיים n עבורו $a_n > b_n$.

פתרון: ברור שהסדרות עולות וגדולות מ-100 החל ממקום מסויים.
נשים לב לעבודות הבאות:

$$a_{n+2} > a_{n+1}^2 > a_n^4$$

$$b_{n+2} = b_n^2 + b_{n+1} = b_n^2 + b_n + b_{n-1}^2 < 3b_n^2 < b_n^3$$

ולכן

$$\frac{\ln\ a_{n+2}}{\ln b_{n+2}} > \frac{4}{3} \cdot \frac{\ln a_n}{\ln b_n}$$

אחרי מספיק הכפלות ב-$\frac{4}{3}$ נקבל ש-$\frac{\ln a_N}{\ln b_N} > 1$.