

חצי חסום.

משולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O . I הוא מרכז המעגל החסום שמשיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות U, V, W . המעגל החצי חסום מול A משיק לצלעות AB, AC בנקודות D, E ול- Ω בנקודה T .

1. M היא אמצע הקשת BC במעגל החוסם של ABC . הוכיחו כי TM ו- AU נחתכים על המעגל החצי חסום.

2. עקבי האנכים מ- B, C ל- VW יסומנו R, S . הוכיחו כי TI חוצה את RS .

3. נסמן את השיקוף של C ביחס ל- T ב- F . הוכיחו כי המעגל CFI משיק לצלע AC .

4. הישרים AT ו- DE נפגשים בנקודה Y . M היא אמצע צלע BC , הוכיחו כי MI חוצה את הקטע AY .

5. BC נחתך עם TI, DE בנקודות P, Q בהתאמה. M היא אמצע PQ . הוכיחו כי TM משיק למעגל החוסם של ABC .

6. הוכיחו כי $\angle TDI = 90^\circ$ אם ורק אם $AC + BC = 3AB$.

7. נסמן ב- J את השיקוף של I ביחס ל- T . הוכיחו כי $AIUJ$ חסום במעגל.

8. משולש ABC חוסם מעגל ω . N היא אמצע הקשת \widehat{BAC} . תהי P נקודה על ω כך ש- $\angle UPN = 90^\circ$. המעגל החוסם של NAP נחתך עם ω ב- P, X ועם BC ב- Y, Z . הוכיחו כי AX ו- NY או AX ו- NZ נפגשים על Ω .

9. נתון שהישר שמקביל ל- AO ועובר ב- U , הישר המאונך ל- AI ועובר ב- I והישר המאונך ל- BC ועובר ב- A נפגשים בנקודה אחת. הוכיחו כי שלושת הישרים הנ"ל נחתכים במפגש הגבהים של המשולש.

10. הישר VW נחתך עם Ω בנקודות P, Q . המעגל החסום ב- ABC נחתך שנית עם המעגל החוסם של UPQ בנקודה X . הוכיחו כי A, T, X נמצאות על ישר.

11. הישר שעובר ב- I ומאונך ל- CI חותך את הצלע BC בנקודה P ואת הקשת \widehat{BC} בנקודה Q . ישר המקביל ל- AI ועובר ב- P נחתך עם AQ בנקודה X והישר המקביל ל- AI ועובר ב- Q נחתך עם AB בנקודה Y . נסמן ב- M, N את אמצעי הקטעים AX, BC . נתון ש- X, Y, I נמצאות על ישר, הוכיחו כי הנקודות N, M, I על ישר.

12. תהי K נקודה על המעגל ATI כך ש- $KI \parallel BC$. האנך האמצעי של BC נחתך עם AT בנקודה S . הישר KS חותך שנית את המעגל ATI בנקודה L . הוכיחו כי המשיק למעגל BCL ב- L עובר במרכז המעגל החוסם של ALO .

13. AH הוא גובה במשולש ו- M, N הן האמצעים של BC, AH . MN נחתך עם חוצה הזווית החיצוני של A ב- P . תהי S נקודה על המעגל החצי חסום כך ש- BCS משיק למעגל החצי חסום. הוכיחו כי PS עובר במרכז המעגל החסום מבחוץ מול A .