חצי אינווריאנטים

1. מדינה רחוקה מחולקת למחוזות, בכל מחוז שולטת מפלגת הכחולים או מפלגת האדומים. פעם בשנה אחד המחוזות יכול להחליף את מפלגת השלטון ממפלגה א׳ למפלגה ב׳, וזאת בתנאי שמבין המחוזות שגובלים עם המחוז, יותר מחוזות נשלטים על ידי מפלגה ב׳. הראו כי כעבור זמן מה החלפות השלטון יפסקו.

2. במדינה רחוקה שצורתה לוח ריבועי $N \times N$ (כל משבצת זה עיר), $N-1$ מהערים נדבקו בקורונה. כל יום, הקורונה מתפשטת לכל הערים שיש להן לפחות שתי ערים שכנות לפי צלע שכבר נדבקו בקורונה. הוכיחו כי לפחות עיר אחת אף פעם לא תדבק.

3. ברחוב מסוים יש אינסוף בתים באחד הצדדים של הכביש, והם ממוספרים: ...,‏ ‎-2‎, ‎-1‎, 0, 1, 2, ... במספר בתים יש נגנים, ויכולים להיות כמה נגנים באותו הבית. כל יום, שני נגנים שגרים באותו בית מתעצבנים על הרעש, וכל אחד עובר דירה: אחד עובר בית אחד ימינה, ואחד עובר בית אחד שמאלה.
האם יכול להיות שכעבור כמה ימים יחזרו הנגנים למיקום ההתחלתי שלהם?

4. במישור נתונות N נקודות אדומות ו-N נקודות כחולות במצב כללי, כלומר אף שלוש לא על ישר אחד. הוכיחו כי אפשר לחלק את הנקודות ל-N זוגות של נקודה כחולה ונקודה אדומה, כך שאף שני קטעים בין נקודות באותו זוג לא נחתכים.

5. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את הפעולות הבאות:
- למחוק מהלוח ארבעה מצרים מהצורה x, x, y, y ולרשום על הלוח את המספרים $x+y, x-y$.
- למחוק מהלוח את המספר 0 בכל מקום בו הוא רשום.

האם יתכן שנציע למצב שבו:
א. יש על הלוח לכל היותר מספר 1?
ב. יש על הלוח לכל היותר 3 מספרים?

6. סיזיפוס משחק משחק ברביע הראשון. הוא מתחיל עם ארבע אבנים שנמצאות ב-$(0,0)$. מתי שירצה, הוא יכול להוריד אבן מהמיקום ה-(i,j), ואז שתי אבנים מופיעות באופן קסום במקומות ה-$(i,j+1)$ וה-$(i+1,j)$. סיזיפוס צריך שבכל משבצת תהיה לכל היותר אבן אחת. האם יכול סיזיפוס להצליח במטרתו?

7. על הלוח רשומים $2n$ שלמים עוקבים. בכל שלב מחלקים אותם לזוגות וכל זוג מספרים(x,y) מחליפים בזוג המספרים $(x+y, x-y)$. האם יתכן שכעבור זמן מה שוב יופיעו על הלוח $2n$ מספרים עוקבים?

8. נתון לוח משבצות אינסופי. בכל משבצת של חצי המישור התחתון נמצא חייל. בכל מהלך חייל קופץ מעל חייל סמוך לפי צלע למרחק של שתי משבצות ואוכל אותו. האם אפשר להעביר חייל כלשהו לשורה העשירית מעל חצי המישור שבו הם נמצאים בהתחלה?

9. במעגל רשומים ארבעה מספרים שלמים אי-שליליים a, b, c, d. כל דקה מחליפים את המספרים ב-$|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|$.
הוכיחו כי החל מרגע מסוים כל המספרים שיכתבו על הלוח יהיו אפסים.

10. עופר הפיזיקאי גילה חלקיק חדש וקרא לו "אימון". במעבדה של עופר יש מספר אימונים, חלק מזוגות האימונים שזורים, אימון אחד יכול להשתתף בהרבה קשרי שזירה. עופר גילה שהוא יכול לבצע שתי פעולות עם האימונים:

- אם יש אימון ששזור עם כמות אי-זוגית של אימונים אחרים עופר יכול להרוס אותו.
- עופר יכול ליצור אימון תאום לכל אימון במעדה. תהליך זה גורם לכל אימון חדש I' להיות שזור עם התאום שלו I וכל שני אימונים חדשים I', J' יהיו שזורים אם ורק אם התאומים שלהם I, J היו שזורים.

הוכיחו כי עופר יכול לבצע סדרה של פעולות מהסוגים הנ"ל ולגרום לכך שאף שני אימונים במעבדה לא יהיו שזורים.