

## שאלות סשה – קבוצת רותם

1. מטילים קובייה הוגנת בין שני מישורים, שמשופעים ב- $45^\circ$  בכיוונים שונים. לאחר הזריקה הקובייה נופלת כך ששתי פאות שלה פונות כלפי מעלה. תוצאת הזריקה היא סכום המספרים (הממשיים) הכתובים על פאות אלו. האם ניתן לבחור את המספרים הכתובים על הפאות, כך שהתוצאה תמיד תהיה 1, 2, 3, 4, 5 או 6, והסיכוי לקבל כל אחת מהאפשרויות האלו יהיה שווה?

2. מרדכי והמן משחקים משחק על רשת משולשית. מרדכי צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכתום, והמן צובע בכל תור צלע של משבצת משולשית בכחול. מרדכי מתחיל.

א. נניח שהמטרה של מרדכי היא שיווצר במהלך המשחק משולש שווה צלעות שכל הצלעות שלו צבועות באותו הצבע, ואורך הצלע שלו גדולה מאורך הצלע של המשבצות. האם יוכל מרדכי להשיג את מטרתו?

ב. נניח שהמטרה של מרדכי היא שבאחת המשבצות כל הצלעות יהיו באותו צבע. האם הוא יוכל להשיג מטרה זו? אם כן, כמה מהלכים ידרשו לשם כך במקרה הגרוע ביותר?

3. סבתא אפתה עוגה בצורה של מלבן מישורי. לסבתא יש סכין ארוכה שמאפשרת לחלק את העוגה לאורך קו שמחבר שתי נקודות נתונות (למשל, כבר בהתחלה ניתן לחתוך את העוגה לאורך אלכסון). מותר גם להזיז חלקים של העוגה ולהצמיד אותם בצורה אחרת.

א. סבתא רוצה לחלק את העוגה ל-3 מנות שוות שטח עבור שלושת הנכדים שלה. מהי כמות החיתוכים המינימאלית שהיא צריכה לבצע?

ב. הוכיחו שסבתא יכולה לחלק את העוגה ל- $n$  מנות שוות שטח, כאשר  $n$  זו כמות הילדים בגן (מספר טבעי כלשהו).

4. שלושה קיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל שאורך הצלע שלו 100 מטרים. ברגע מסוים כל קיפוד הולך בקו ישר: הקיפוד הראשון הולך מטר, השני שני מטרים, והשלישי 3 מטרים.

א. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל?

ב. האם יתכן שבסוף הקיפודים נמצאים בקודקודים של משולש משוכלל באותו גודל כמו המשולש המקורי?

ג. שאלה דומה עבור ריבוע: האם יתכן שארבעה קיפודים התחילו בקודקודים של ריבוע עם אורך צלע 100 מטר, עברו מרחקים 1, 2, 3 ו-4 מטרים (לאו דווקא בסדר זה), וסיימו את תנועתם בקודקודים של ריבוע?

5. בכל משבצת של לוח משבצות ריבועי כתוב 0 או 1. מותר לשנות את הערכים שכתובים באלכסון הראשי. הוכיחו שאפשר להגיע למצב, בו כל השורות שונות זו מזו וכל העמודות שונות זו מזו.

$$6. \text{מצאו את כל הפולינומים } P \text{ המקיימים } P(P(x)) + x = P(P(x) + x).$$

7. במישור סומנו  $N$  נקודות שלא כולן על ישר אחד. משולש נקרא חשוב אם כל קודקודיו הן נקודות מסומנות. האם יתכן שמרכז המעגל החוסם של כל משולש חשוב הוא נקודה מסומנת?

8. במישור אוקלידי נמצאים 5776 חרגולים נקודתיים. בהתחלה כולם נמצאים בשדה עגול, שמרכזו בנקודה  $A$  ורדיוסו 10 מטרים, ואף שלושה לא נמצאים על ישר אחד. הם שואפים להגיע לדשא הירוק יותר של השכן – שגם הוא בצורת עיגול, אשר מרכזו בנקודה  $B$  ורדיוסו 1 מטר. המרחק בין הנקודות  $A$  ו- $B$  הוא 100 מטרים. בכל מהלך חרגול אחד קופץ מעל חרגול אחר, כך שהחרגול האחר יהיה באמצע הקטע שמחבר את נקודת ההתחלה של הקפיצה עם נקודת היעד שלה. האם החרגולים יכולים להשיג את מטרתם?

$$9. \text{מצאו את כל הפונקציות } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ עבורן מתקיים לכל } x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$f(f(x, z), f(z, y)) = f(x, y) + z.$$

בתאבון!