Olympic Revenge

אין להשתמש במחשבון

1. יהי n טבעי. הוכיחו כי כל ראשוני $p \neq 2$ שמחלק את $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ מקיים ש- $p \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

2. האם ניתן לפרק ולהרכיב קובייה הונגרית $4 \times 4 \times 4$ בלפחות 577,800 דרכים שונות לא שקולות?
הערות:
   א. כאשר מרכיבים את הקובייה בחזרה, חלק קדקודי צריך ללכת לחלק קדקודי, חלק ממקצוע צריך ללכת לחלק ממקצוע, וחלק ממרכז פאה צריך ללכת לחלק ממרכז פאה.
   ב. שני מצבים בקובייה הונגרית $4 \times 4 \times 4$ נקראים שקולים אם ניתן להגיע מהאחד לשני על ידי סיבובי פאות ושכבות מרכזיות שמקבילות לפאות.

3. יהא משולש ABC ויהיה המעגל החוסם שלו ω עם מרכז ב- O. החיתוך של המשיק ל- ω בנקודה A, עם הישר BC, יקרא K, והחיתוך של המשיק ל- ω בנקודה B, עם הישר AC, יקרא L. נסמן את אמצע AK ב- M, ואת אמצע BL ב- N. הישר MN יסומן באות α. נסמן את עקבי הגבהים מ- A, B ו- C לצלעות *המשולש* ב- D, E ו- F בהתאמה. האנכים האמצעיים של EF, DF, DE חותכים את α ב- X, Y, Z בהתאמה. נסמן את חיתוך AD, BE, CF עם ω ב- D', E', F' בהתאמה.
הוכיחו כי הישרים XD', YE', ZF', HO נחתכים בנקודה.

4. תהי $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (מקבוצת הפונקציות הממשיות לעצמה), המקיימת, לכל f, g פונקציות ממשיות:
$$F(F(f) \circ g + g) = f \circ F(g) + F\Big(F\big(F(g)\big)\Big)$$
כאשר $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
הוכיחו כי קיימת פונקציה $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שלכל f פונקציה ממשית, מתקיים:
$$F(f) = \sigma \circ f \circ \sigma$$

בהצלחה!