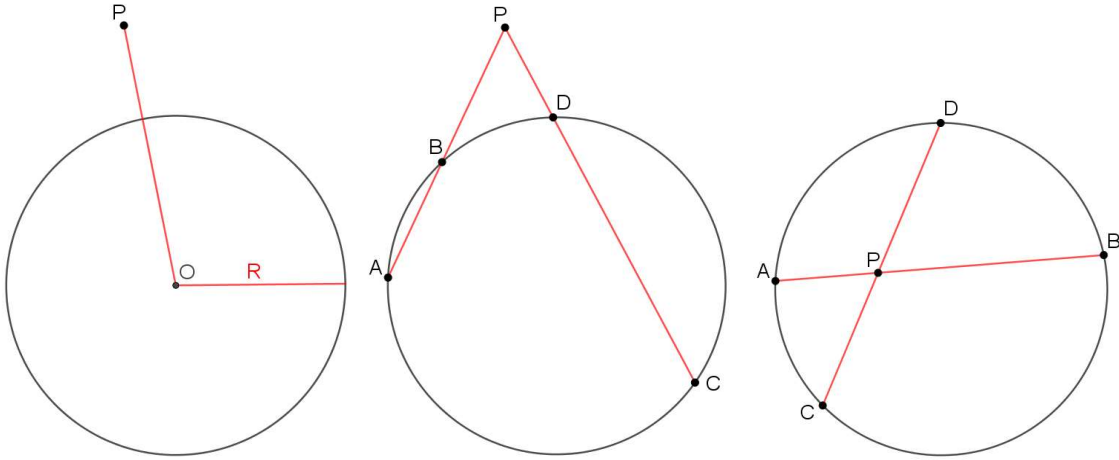


דף רדיקלי

דרגת נקודה:

בהינתן מעגל Ω במישור שמרכזו O ורדיוסו R , ונקודה P (בתוכו, עליו, או מחוצה לו), נגדיר את הדרגה של הנקודה P ביחס למעגל באמצעות הנוסחה: $Ord_{\Omega}(P) = |PO|^2 - R^2$.



* אם P היא נקודה מחוץ למעגל, אז דרגת הנקודה של P היא בדיוק אורך המשיק בריבוע.

* אם יש אחד דרך P חותך את Ω בנקודות A, B ויש נוסף דרך P חותך את Ω בנקודות C, D , מתקיים ש-

$$Ord_{\Omega}(P) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$$

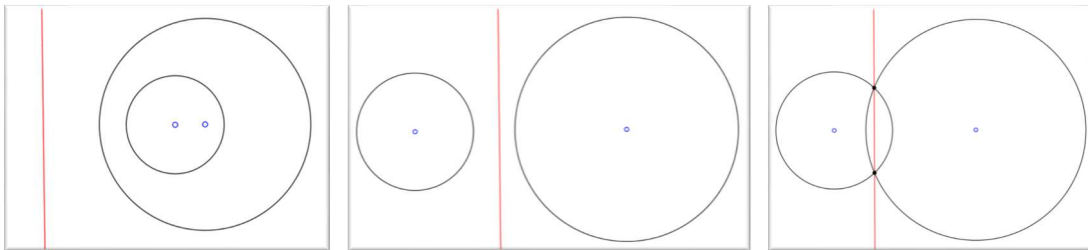
כאשר מדובר בקטעים מכוונים, כלומר:

- אם $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ הם באותו כיוון, המכפלה שלהם מוגדרת להיות $|PA| \cdot |PB| +$
- אם $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ בכיוונים הפוכים, המכפלה שלהם מוגדרת להיות $|PA| \cdot |PB| -$

* גם הכיוון השני של הטענה נכון: אם נתונים שני ישרים PAB, PCD כך ש- $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$, אזי יש מעגל שעובר דרך A, B, C, D .

ציר רדיקלי:

עבור שני מעגלים (עם מרכזים שונים) α ו- β נגדיר את הציר הרדיקלי שלהם להיות המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהדרגות שלהן לשני המעגלים שוות זו לזו.



* הציר הרדיקלי של שני מעגלים הוא תמיד קו ישר שמאונך לקטע בין המרכזים.

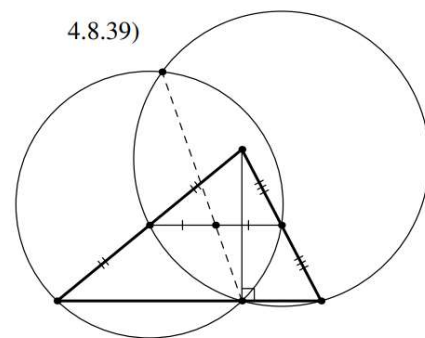
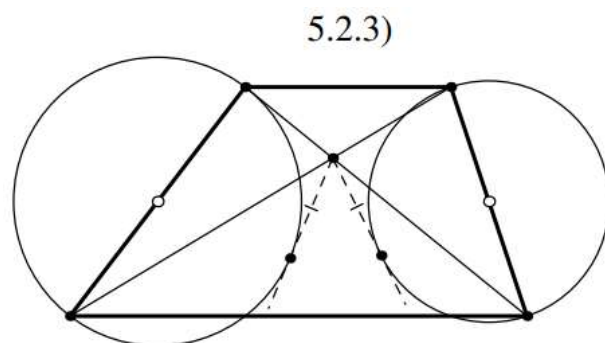
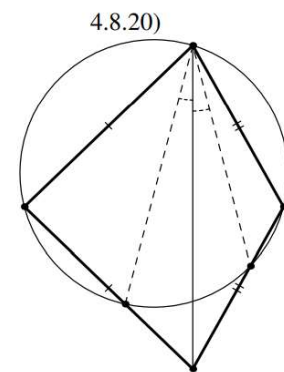
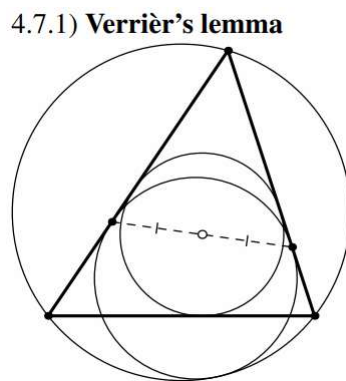
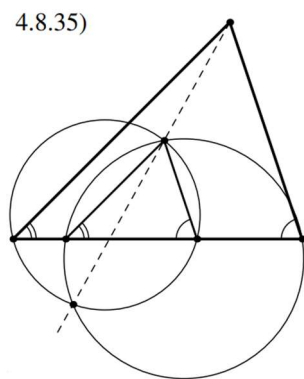
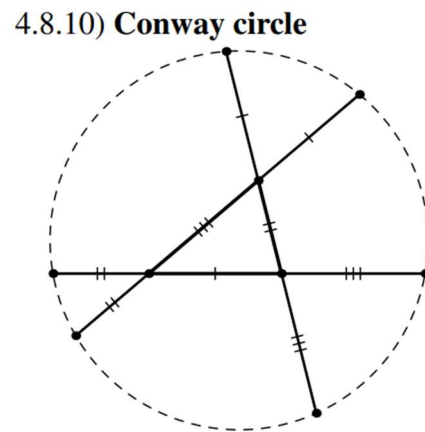
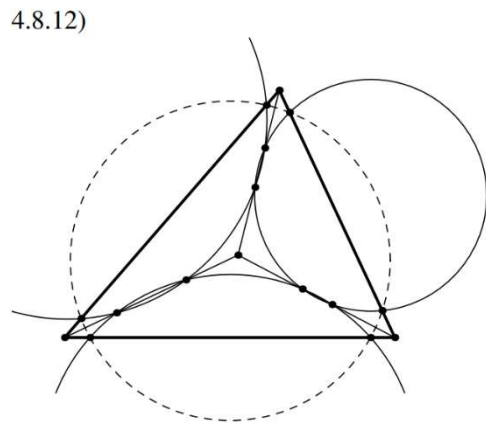
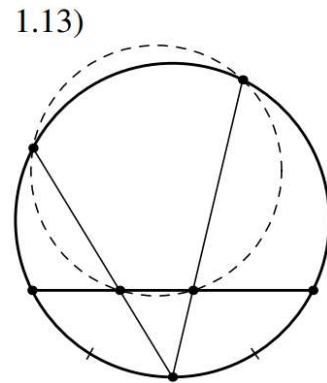
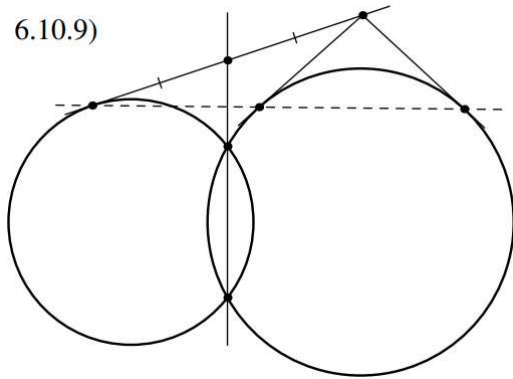
* כאשר המעגלים נחתכים, הציר הרדיקלי עובר דרך שתי נקודות החיתוך שלהם.

* אם המעגלים משיקים זה לזה, הציר הרדיקלי הוא המשיק המשותף.

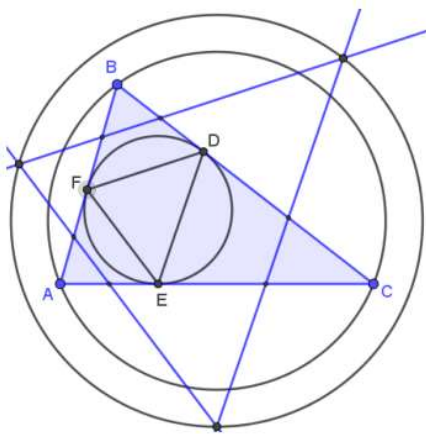
משפט: עבור כל שלושה מעגלים (עם מרכזים שונים), שלושת הצירים הרדיקלים שלהם נפגשים בנקודה אחת!

תרגיל רדיקלי

1. הוכיחו כל טענה מהדף הרדיקלי שמסומנת ב- (*).
2. הוכיחו את המשפט.



3. הוכיחו (עם הכלים החדשים שלנו) כי האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת.
4. הוכיחו (עם הכלים החדשים שלנו) כי הגבהים נפגשים בנקודה אחת.
5. במשולש ABC מרכז המעגל החסום הוא I . הנקודה D נמצאת על הישר BC כך ש- $\angle AID = 90^\circ$. באופן דומה הנקודה E נמצאת על הישר AC כך ש- $\angle BIE = 90^\circ$, והנקודה F נמצאת על הישר AB כך ש- $\angle CIF = 90^\circ$. הראו כי הנקודות D, E, F נמצאות על ישר אחד שמהווה את I עם מרכז המעגל החסום של המשולש ABC .
6. במשולש ABC המעגל החסום משיק לצלעות BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. אמצע הקטע EF יסומן N . הוכיחו שמרכז המעגל החסום של המשולש AND נמצא על הישר BC .
7. נתון משולש ABC שחסום במעגל Ω . המשיק ב- A פוגש את הצלע BC בנקודה X . אמצע הקטע AX ייקרא U . באופן סימטרי נגדיר את הנקודות Y, V ו- Z, W . הראו כי הנקודות U, V, W נמצאות על ישר אחד.



8. במשולש ABC המעגל החסום משיק לצלעות BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הישר שנמצא במרחקים שווים מ- EF ומהנקודה A , הישר שנמצא במרחקים שווים מ- FD ומהנקודה B , והישר שנמצא במרחקים שווים מ- DE ומהנקודה C , יוצרים את המשולש PQR . הוכיחו שלמעגלים החוסמים של המשולשים ABC ו- PQR יש מרכז משותף.