רונאל ואיתן יצאו לטיול...

חלק ראשון – עד חצות:

יהי משולש חד-זווית ABC בו הגבהים מסומנים ב-h_a, h_b, h_c וכן הם נפגשים ב-H. יהיו $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ המעגלים החסומים במשולשים BCH, ACH, ABH בהתאמה. נסמן בצבע ורוד וב-p_a את המשיק החיצוני למעגלים ω_b, ω_c הקרוב יותר לצלע BC. בצורה דומה נגדיר את p_b, p_c. נסמן בכתום וב-o_a את המשיק הפנימי למעגלים ω_b, ω_c שאינו h_a. בצורה דומה נגדיר את o_b, o_c.

א. הוכיחו ש-p_a מקביל ל-BC.
ב. הוכיחו ש-o_a עובר באמצע BC.
ג. הוכיחו שמכך ש-h_a, h_b, h_c נפגשים בנקודה (H) אז o_a, o_b, o_c נפגשים בנקודה. נסמנה T.

חלק שני – הקשיחות הקשוחה מקשיחותא:

נסמן בירוק וב-g_a את המשיק החיצוני למעגלים ω_b, ω_c שאינו p_a. בצורה דומה נסמן את g_b, g_c.
נגדיר את X_a להיות החיתוך של h_a עם g_b.
נגדיר שמעגלים α, β יהיו **מאונכים** אם קיימים להם משיק פנימי ומשיק חיצוני שמאונכים זה לזה.

ד. מצאו תנאי שקול לכך ששני מעגלים עם רדיוסים R_1, R_2 ועם מרחק d בין מרכזיהם מאונכים זה לזה.
ה. יהיו σ, τ שני מעגלים מאונכים זה לזה. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים שמאונכים ל-2 המעגלים הללו.

חזרו לציור המקורי:

ו. "מחקו" את הציור חוץ מהמעגלים $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ שמאונכים זה לזה (בזוגות) והנקודה H. כעת, הראו כי ניתן לשחזר את המשולש ABC בעזרת הנתונים הללו.
ז. הוכיחו שבהינתן המעגלים ω_b, ω_c שמאונכים זה לזה והנקודה H על משיק משותף פנימי שלהם, ניתן לשחזר את המשולש ABC וכן את המעגל ω_a.
ח. הוכיחו שהמעגל ω_a שמשחזרים בסעיף ז' הוא בדיוק אותו המעגל אם היינו משחזרים את אותו המעגל בסעיף ז' כאשר במקום הנקודה H תהיה הנקודה X_a.
ט. הוכיחו שהישרים h_a, g_b, g_c נפגשים ב-X_a. בצורה דומה נגדיר את X_c, X_b.
י. הוכיחו שהישרים o_a, p_b, p_c נפגשים בנקודה. נסמנה D. בצורה דומה נגדיר את E, F.

חלק שלישי – קבוצה קיצונית פוליטית:

נסמן ב-ε את מעגל 9 הנקודות של ABC ונסמן את מרכזו ב-Eu. בנוסף, נסמן ב-γ את המעגל החסום מבחוץ למעגלים $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ (כלומר, המעגל הקטן שמשיק לשלושתם) ונסמן את מרכזו ב-J. נסמן ב-P את החיתוך של p_a ו-g_a. בצורה דומה, נסמן את Q ו-R (כאשר Q מתאים ל-B ו-R מתאים ל-C). נסמן ב-K את החיתוך של g_b, g_c. בצורה דומה נגדיר את L, M (כאשר L מתאים ל-B ו-M מתאים ל-C).

יא. הוכיחו ש-H היא מרכז המעגל החסום ב-DEF.
יב. הוכיחו ש-T היא מרכז המעגל החסום (מבחוץ) ב-KLM.
יג. הוכיחו ש-P על הציר הרדיקלי של המעגלים החסומים מבפנים ומבחוץ במשולשים DEF, KLM שמרכזיהם הם H, T (המעגלים מהטענות הקודמות).
יד. הוכיחו ש-P על הציר הרדיקלי של γ ו-ε.
טו. הוכיחו ש-HT מקביל ל-JEu.

חלק רביעי – סוף טוב הכל טוב:

נסמן ב- M_a, M_b, M_c את אמצעי הצלעות BC, AC, AB בהתאמה. נסמן את מרכזי המעגלים החוסם והחסום של ABC ב-O ו-I.

טז. קל לראות שהמשולשים DEF ו- $M_aM_bM_c$ דומים, כי צלעותיהם מקבילות. מצאו את מרכז ההומותטיה בין 2 המשולשים.

יז. הוכיחו כי הישר JEu מקביל לישר העובר ב- Oובאמצע HI.