תרגיל בתורת מספרים

בתרגיל זה כל המספרים הנתונים שלמים, והמספר p תמיד ראשוני.

1. מספר $5n^2+1$ מתחלק ב- p. הוכיחו שספרת העשרות של p זוגית.

2. הוכח כי לכל x,y שלמים המספר $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ אינו שלם.

3. הוכיחו כי יש אינסוף ראשוניים מסוג $4k+1$ ומסוג $6k+1$.

4. מצאו את כל ה- n-ים עבורם ניתן לחלק את הקבוצה $\{n,n+1,n+2,...,n+1997\}$ למספר מחלקות, כך שבכל מחלקה המכפלה תהיה זהה.

5. האם קיים מספר שלם שהוא ריבוע מודולו כל מספר ראשוני אך הוא עצמו אינו ריבוע?

6. הוכיחו כי $\sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{y^2+a}{p}\right)=\begin{cases}-1, & p\nmid a\\ p-1, & p\mid a\end{cases}$.

7. המספר n^4-n^2+1 מתחלק ב- p. מצאו את p מודולו 12.

8. עבור מספרים טבעיים m,n $A=\frac{(m+3)^n+1}{3m}$ הוא שלם. הראו כי A אי זוגי.

9. הוכח כי אחד המספרים $1,2,3,...,\lceil\sqrt{p}\,\rceil$ אינו ריבוע מודולו p.

10. יהיה $p>3$ ראשוני, כך שספרת היחידות של 2^p היא 8, וגם $2p+1$ ראשוני. היתכן ש-2^p-1 ראשוני?

11. מצאו את כל המספרים השלמים a,b,c כך ש-c חיובי ולכל מספר טבעי n מתקיים $a^n+2^n|b^n+c$, ובנוסף $2ab$ אינו ריבוע.

הגדרות ומשפטים

נגדיר את סימן לג'נדר להיות

$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0\,, p|a \\ 1, p \text{ ריבוע מודולו } a \neq 0 \\ -1, \text{אחרת} \end{cases}$ עבור $p > 2$ ראשוני.

קריטריון אוילר: $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$ עבור $p > 2$.

משפט ההדדיות הריבועית של גאוס:

אם p, q מספרים ראשוניים אי זוגיים אז מתקיים $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}};\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$