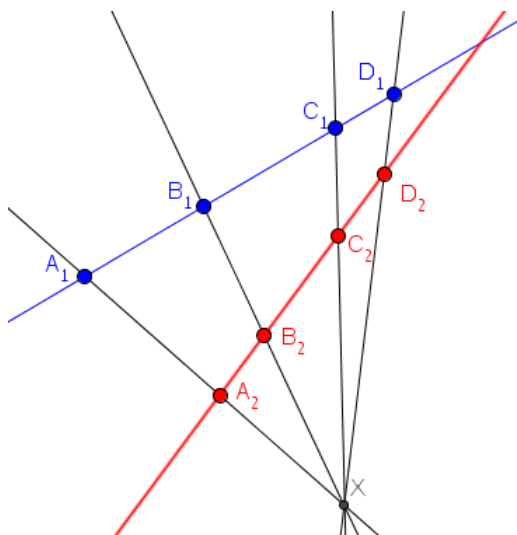


## תזכורת על טענות שימושיות:



1. הגדרה: יחס כפול של 4 נקודות על ישר מוגר

$$\text{כד: } [A, B; C, D] = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD}$$

הוא בקטעים מכוונים. (הערה – יש חשיבות לסדר).

הטלה שומרת יחס כפול:

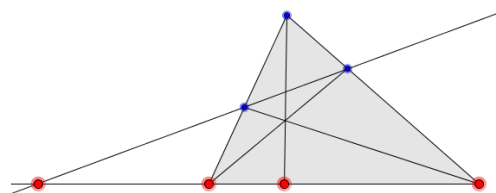
$$[A_1, B_1; C_1, D_1] = [A_2, B_2; C_2, D_2]$$

2. כאשר היחס הכפול שווה  $-1$  הרביעייה נקראת רביעייה הרמונית.

קצוות הקטע, אמצע הקטע והנקודה האינסופית זו דוגמה ראשונה לרביעייה הרמונית.

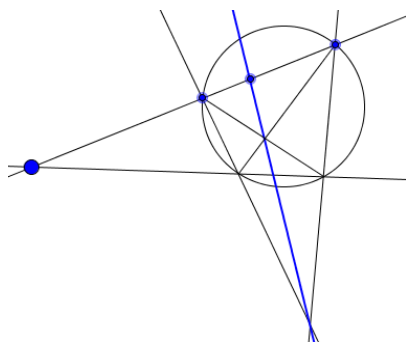
3. יחס כפול של רביעיית ישרים  $[OA, OC; OB, OD]$  שעוברים בנקודה  $O$  זה יחס כפול של נקודות חיתוך שלהם עם ישר חמישי כלשהו לא דרך  $O$  (מסתבר שזה לא תלוי בבחירת הישר). בדומה מוגדרת רביעייה הרמונית של ישרים.

4. בהינתן שניונית  $S$  שעוברת בנקודות  $A, B, C, D$  לכל נקודה נוספת  $O$  על  $S$  היחס הכפול  $[OA, OC; OB, OD]$  הוא אותו דבר (לא תלוי בבחירת  $O$ ). לכן באופן טבעי מוגדר היחס הכפול של 4 נקודות על השניונית. כאשר היחס הוא  $-1$  המרובע נקרא **מרובע הרמוני**. ניסוח שקול הוא שהמשיקים בקודקודים  $A$  ו- $C$  נפגשים על הישר  $BD$ ; ניסוח שקול אחר, במקרה של מעגל, זה ש- $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ . דוגמה פשוטה למרובע הרמוני היא דלתון חסום.



5. משילוב של משפטי צ'בה ומנלאוס מקבלים רביעייה הרמונית.

6. דואליות ביחס למעגל שמרכזו  $O$ : הישר  $p$  דואלי לנקודה  $P$  שאינברסית ביחס למעגל לעקב האנך מ- $O$  ל- $p$ . דואליות מחליפה בין נקודות לישרים, בצורה שהופכת קשר של הכלה.



7. הנקודות הכחולות בציור הן רביעייה הרמונית, והנקודה הכחולה מחוץ למעגל דואלית לישר הכחול.

מכאן **משפט ברוקר**: אם במרובע  $ABCD$  שחסום במעגל שמרכזו  $O$  האלכסונים נפגשים בנקודה  $X$ , זוגות הישרים של הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודות  $Z$  ו- $Y$ , אז במשולש  $XYZ$  הגבהים נפגשים בנקודה  $O$ .

## תרגיל פרויקטיבי

1. נתון משולש ABC בו H הוא מפגש הגבהים. אמצע הצלע BC תסומן ב-M. הישר דרך H שמאונך ל-HM חותך את הצלעות AB, AC בנקודות X, Y. הוכיחו כי  $HY=HX$ .
2. נתון משולש ישר זווית ABC, בו הזווית C ישרה. מעגל  $\omega$  שעובר ב-A, B, חותך את הצלעות CA ו-CB ב-D וב-E בהתאמה. הקטעים BD, AE נחתכים בנקודה P. המשיקים ל- $\omega$  בנקודות E, A נחתכים ב-Q. המעגל CPQ חותך את AC, BC ב-L, K. הוכיחו כי LK מאונך ל-PQ.
3. נתון משולש ABC בו BE, CF גבהים. חוצה הזווית מ-A חותך את EF, BC ב-M, N בהתאמה. נבחרה נקודה P כך ש-MP מאונך ל-EF ו-NP מאונך ל-BC. הוכיחו כי AP עובר דרך אמצע AB.
4. נתון משולש ABC. המעגל החסום משיק ל-BC ב-K ו-AD הינו גובה. M מוגדרת בתור אמצע AD. החיתוך של KM עם המעגל החסום יסומן ב-N. הוכח כי המעגל BNC משיק למעגל החסום.
5. במשולש ABC עקבי הגבהים הם D, E, F בהתאמה. אמצע BC יסומן ב-M, חיתוך HM עם EF יסומן ב-T, ומפגש המשיקים מ-C, B למעגל החסום יסומן ב-P. הוכח כי T, D, P ישר.
6. נתון משולש ABC.  $\Gamma$  הינו המעגל החסום מבחוץ לצלע BC. נקודות ההשקה שלו לצלעות BC, CA, AB יסומנו ב-D, E, F בהתאמה. אמצע EF יסומן ב-M. המעגל החסום של המשולש חותך את  $\Gamma$  בנקודות K, L כך שהנקודות F, K, L, E נמצאות על  $\Gamma$  בסדר הזה. אמצע הקשת BAC יסומן ב-N. החיתוך של KN עם AB יסומן ב- $C_1$ , והחיתוך של AC עם NL יסומן ב- $B_1$ . החיתוך של FL עם KE יסומן ב-G והחיתוך של AG עם המעגל ABC יסומן ב-P.  
(א) הוכח כי N, D, P ישר.  
(ב) הוכח כי  $C_1, B_1, G, M$  ישר.