

פרוייקטיבית

1. AD, BE, CF הם גבהים במשולש ABC . DF, BE נחתכים ב- P , ו- DE, CF נחתכים ב- Q . הוכיחו כי BC, EF, PQ נפגשים בנקודה.

2. על מעגל ω נבחרו הנקודות A, B, C, D כך שהמשיקים מ- B, D נחתכים על AC . המשיק ל- ω ב- C חותך את המשיק ל- ω ב- D בנקודה Q ואת הישר AD בנקודה R . הוכיחו כי AQ, BR נחתכים על ω .

3. נתון מרובע חוסם $ABCD$ שמקיים $\angle C = \angle D$. המעגל החסום משיק לצלעות AB, CD ב- E, F בהתאמה. עקבי האנכים מ- A, B לצלע CD יסומנו K, L בהתאמה. הוכיחו כי הישרים AL, BK, EF נחתכים בנקודה.

4. יהי משולש ABC ומעגל ω_A המשיק לצלעות AB, AC . באופן דומה נגדיר את ω_B, ω_C . חיתוך המשיקים הפנימיים של ω_B, ω_C יסומן P_A , ובאופן דומה נגדיר P_B, P_C . הוכיחו כי AP_A, BP_B, CP_C נפגשים בנקודה אחת.

5. נתון משולש ABC החסום במעגל ω . מעגל שעובר ב- B, C חותך את הצלעות AB, AC ב- D, E בהתאמה. המשיקים ל- ω ב- B, C חותכים את DE ב- P, Q בהתאמה. CD, BE חותכים שנית את ω בנקודות X, Y בהתאמה. הוכיחו כי PX, QY נחתכים על ω .

6. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות ב- D, E, F ומרכזו I . במרובעים $BDIF, CDIE$ חסומים מעגלים שמרכזיהם יסומנו J_B, J_C בהתאמה. הישרים $BC, J_B J_C$ נחתכים ב- P . הוכיחו כי $PI \perp AD$.

7. נתון משולש ABC בו הזווית A ישרה. מעגל ω שעובר ב- B, C חותך את הצלעות AB, AC ב- F, E בהתאמה. הקטעים BE, CF נחתכים בנקודה P . המשיקים ל- ω בנקודות B, E נחתכים ב- Q . המעגל APQ חותך את AB, AC ב- L, K . הוכיחו כי $LK \perp PQ$.

8. במשולש ABC עקבי הגבהים הם D, E, F בהתאמה. מפגש הגבהים הוא H , אמצע BC יסומן M . החיתוך של HM עם EF יסומן T , ומפגש המשיקים מ- B, C למעגל החוסם יסומן ב- P . הוכיחו כי T, D, P ישר.

9. מרובע $ABCD$ חוסם מעגל שמרכזו I . החיתוך של AB, CD יסומן P והחיתוך של AD, BC יסומן Q . החיתוך של AC, PQ יסומן E . מרכז המעגל החסום במשולש CPQ יסומן J . הוכיחו כי הישר שעובר ב- I ומאונך ל- PQ , הישר EJ והמעגל החסום ב- $ABCD$ נפגשים בנקודה.

10. א) במשולש ABC המעגל החסום מבחון מול A יסומן Γ . נקודות ההשקה של Γ לצלעות BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. נסמן ב- M את אמצע EF , המעגל החוסם של ABC חותך את Γ בנקודות K, L כך שהנקודות F, K, L, E נמצאות על Γ בסדר זה. החיתוך של FL עם KE יסומן G והחיתוך השני של AG עם המעגל החוסם יסומן P . הוכיחו כי N, D, P ישר.

ב) נסמן ב- N את אמצע הקשת BAC . החיתוך של KN, AB יסומן C_1 והחיתוך של LN עם AC יסומן B_1 . הוכיחו כי B_1, C_1, M, G ישר.

11. המעגלים החסומים מבחון מול ABC יסומנו $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ ונקודות ההשקה שלהם עם הצלעות BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. המשיקים מ- D ל- ω_B הם l_A ו- BC ו- l_A , והמשיקים מ- D ל- ω_C הם l_A' ו- BC ו- l_A' . באופן דומה נגדיר l_B, l_B', l_C, l_C' . הוכיחו כי הישרים $l_A, l_A', l_B, l_B', l_C, l_C'$ משיקים למעגל אחד.