השיטה ההסתברותית

1. בארץ התיכונה גרים אלפים וגמדים, לכל גמד יש לפחות אלף אחד שהוא חבר שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קבוצה המכילה לפחות מחצית מאוכלוסיית הארץ כך שלכל גמד בקבוצה תהיה כמות אי-זוגית של אלפים חברים בקבוצה.

2. תהי A קבוצה של n שאריות מודלו n^2. הוכיחו כי קיימת קבוצה B של n שאריות מודלו n^2 כך שלפחות מחצית מהשאריות מודולו n^2 מוכלות ב-$A+B$.

3. נתונים m,n שלמים חיוביים ו-p,q ממשיים חיוביים שסכומם אחד.
הוכיחו ש-
$$(1-p^n)^m+(1-q^m)^n \geq 1 .$$

4. במישור סומנו n נקודות כך שאף שלוש לא על ישר אחד. עבור כל מצולע קמור P עם קודקודים בנקודות המסומנות נסמן ב-$a(P)$ את כמות הקודקודים שלו וב-$b(P)$ את כמות הנקודות המסומנות מחוץ ל-P. הוכיחו כי לכל מספר ממשי x
$$\sum_P x^{a(p)} \cdot (1-x)^{b(p)} = 1$$
כאשר הסכום רץ על כל המצולעים הקמורים עם קודקודים בנקודות המסומנות.
הערה: קטע, נקודה והקבוצה הריקה נחשבים מצולעים קמורים.

5. משפחה $\mathcal{F}$ של קבוצות נקראת נחתכת אם לכל $A,B\in\mathcal{F}$ $A\cap B\neq\emptyset$. נניח ש-$n\geq 2k$ ו-$\mathcal{F}$ משפחה נחתכת של תתי קבוצות בגודל k של $\{1,\dots,n\}$. אזי
$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

6. יהיו $a,b,c>0$ ממשיים עבורם $\lfloor an\rfloor+\lfloor bn\rfloor=\lfloor cn\rfloor$לכל n טבעי. הוכיחו כי לפחות אחד מבין a,b,c שלם.

7. הוכיחו כי קיים קבוע חיובי c עבורו לכל n שלם חיובי ולכל על-מישור ב-$\mathbb{R}^n$ שעובר בראשית לפחות $c\cdot 2^n$ מספירות יחידה עם מרכזים ב-$\{-1,1\}^n$ חותכות את המישור.

8. קבוצת מספרים A תקרא חסרת סכומים אם לכל $a_1,a_2\in A$ הסכום שלהם לא ב-A. תהי $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ קבוצת מספרים שלמים חיוביים, הוכיחו כי קיימת ל-X תת קבוצה A מגודל $\frac{n}{3}$ לפחות כך ש-A חסרת סכומים.

9. נתונים מספרים מרוכבים $z_1,\dots,z_n$ כך ש-
$$\sum_{i=1}^{n} |z_i| = 1 .$$
הוכיחו כי ניתן למצוא תת קבוצה S של $\{1,2,\dots,n\}$ עבורה יתקיים:
$$\left|\sum_{i\in S} z_i\right| \geq \frac{1}{\pi} .$$