

פולינומים

1. סימנו במישור את כל הנקודות בעלות קואורדינטות שלמות כך שהערך ה- y שלהן הוא בין 0 ל-10 כולל. נתון פולינום במקדמים שלמים מדרגה 20. מה היא הכמות המקסימלית של נקודות מסומנות שיכולות להימצא על הגרף של הפולינום?

2. הראו שלכל d טבעי קיים פולינום מתוקן יחיד p מדרגה d כך שלכל סדרה של מספרים שלמים a_0, a_1, a_2, \dots אשר מקיימת $\sum_{i=0}^n p(i)a_{n-i} = 0$ עבור כל $n \geq 2$, מתקיים שרק כמות סופית של איברי הסדרה שונים מ-0.

3. א. הוכיחו את המשפט האחרון של פרמה עבור פולינומים. הראו שלא קיימים פולינומים לא קבועים f, g, h ומספר טבעי $n \geq 3$ כך ש $f^n + g^n = h^n$.

ב. הוכיחו את השערת abc עבור פולינומים. הראו כי אם f, g, h פולינומים זרים בזוגות מדרגה לפחות 1 כך שמתקיים $f + g + h = 0$ אז מתקיים $\deg(\text{rad}(fgh)) \geq \max\{\deg f, \deg g, \deg h\} + 1$ כאשר $\text{rad}(p)$ הוא מכפלת כל הגורמים האי-פריקים של p . (ללא ריבוי).

4. הוכיחו כי הפולינום $x^{3072} + 5779x^{1024} + 2018$ אי פריק בשלמים.

5. יהי $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ פולינום במקדמים שלמים כך ש a_0 ראשוני וגם $|a_0| > |a_1| + \dots + |a_n|$. הוכיחו כי p אי פריק בשלמים.

6. יהי p פולינום במקדמים שלמים. ה- n חתימה של p היא n -יה סדורה של השאריות $p(1), \dots, p(n)$ מודולו n . כמה n -יות סדורות הן חתימות של פולינומים כאשר:

א. n חסר ריבועים?

ב. n חסר קוביות?

ג. n כללי?

7. נתון פולינום p המקיים $p(0) = 1$ ו- $x - 1 \mid p(x)^2 - 1$.

מצאו את המקדם של x^{99} בפולינום $(p(x) + 1)^{100}$.

8. האם קיימים פולינום p, q במקדמים שלמים מדרגות לפחות 5779 כך ש- $p(q(x)) = 3q(p(x)) + 1$?

9. האם קיימים פולינומים p, q במקדמים ממשיים כך שמתקיים $p^9(x) + p^{10}(x) = q^{20}(x) + q^{21}(x)$?

10. פולינום p נקרא מאוזן אם $p(0) = 1$ והמקדמים שלו אשר שונים מ-0 הם 1, -1 לסירוגין. הוכיחו כי עבור n, m זרים ו- p מאוזן גם $\frac{(x^{nm}-1)(x-1)}{(x^n-1)(x^m-1)}$ מאוזן.

בתיאבון!