פולינומים

1. . תהי $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ סדרה של פולינומים עם מקדמים ממשיים כך שלכל n,k שלמים מתקיים ש-$P_n(k)=P_{n+k}(k)$. א. האם בהכרח $f_n=f_m$?

ב. איך תשתנה התשובה לסעיף הקודם אם בנוסף נניח שלכל הפולינומים בסדרה מקדמים שלמים?

2. סדרת פולינומים $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ תקרא חשבונית אם קיים פולינום Q כך ש-$P_{n+1}=P_n+Q$. נתונה סדרה חשבונית של פולינומים שהאיבר הראשון שלה וההפרש שלה הם פולינומים מתוקנים עם מקדמים שלמים שאין להם שורש שלם משותף. בנוסף ידוע שלכל איבר בסדרה יש שורש שלם. הוכיחו כי P_1 מתחלק ב-Q ושהמנה היא פולינום לינארי.

3. ידוע שעבור פולינום עם מקדמים ממשיים P קיימים אינסוף זוגות של שלמים זרים (m,n) כך ש-

$$P\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

הראו ש-P לינארי.

4. קבעו האם קיים פולינום לא קבוע $Q(x)$ עם מקדמים שלמים עבורו לכל $n>2$ המספרים $Q(0),Q(1),\dots,Q(n-1)$ מקבלים לכל היותר $0.499n$ שאריות שונות מודולו n.

5. יהיו P,Q,R פולינומים זרים בזוגות ולא קבועים. הראו כי לכל $n\geq 3$

$$P^n\neq Q^n+R^n.$$

6. יהי P פולינום מתוקן עם מקדמים ממשיים כך של-$P\circ P$ ו-$P\circ P\circ P$ מקדמים שלמים. הוכיחו כי גם המקדמים של P שלמים.

7. הראו כי לכל פולינום P עם מקדמים ממשיים ולכל שלם חיובי n קיים פולינום עם מקדמים ממשיים Q כך ש-$(1+x^2)^n|P(x)^2+Q(x)^2$.

8. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים שלמים P כך שלכל x,y ממשים, אם $P(x)$ ו-$P(y)$ שלמים אז גם $P(xy)$ שלם.

9. יהי $n\geq 4$ ו-P,Q פולינומים מרוכבים. ידוע ש-

$$P\big(Q(x)\big)=x^n+x^{n-1}+\dots+x+2023$$

הוכיחו כי לפחות אחד מבין P,Q לינארי.

10. יהי n שלם גדול מ-1. שני פולינומים P,Q יקראו *דמי-בלוקים* אם לכל $i\in\{1,2,\dots,n\}$ מתקיים ששתי הסדרות הבאות

$$P(2015i),P(2015i-1),\dots,P(2015i-2014)$$

$$Q(2015i),Q(2015i-1),\dots,Q(2015i-2014)$$

הן תמורות זו של זו.

א. הוכיחו כי קיימים שני פולינומים שונים P,Q ממעלה $n+1$ שהם דמי בלוקים.

ב. הוכיחו כי לא קיימים שני פולינומים שונים P,Q ממעלה n שהם דמי בלוקים.