פולינומים

1. יהי $P(x)$ פולינום. האם יתכן שמקדמי הפולינום $Q(x)=P(x)(x-1)$ יהיו כולם חיוביים?

2. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של הדרגות הזוגיות בו שווה לסכום המקדמים של הדרגות האי-זוגיות. האם מכפלה של פולינום מגניב בפולינום אחר היא בהכרח פולינום מגניב?

3. נתון כי לפולינום $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$ יש 5 שורשים ממשיים. כמה שורשים ממשיים יתכן שיהיו לפולינום $Q(x)=x^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1$?

4. נתון הפולינום $P(x)=x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+...+a_1x+a_0$, שמקדמיו ממשיים, וכל שורשיו שונים. האם ייתכן שיש לו בדיוק 5 שורשים ממשיים?

5. נתבונן בפולינום $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ שמקדמיו מרוכבים ושורשיו הם $x_1,x_2,...,x_n$. נתבונן גם בפולינום $Q(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ ששורשיו הם ${x_1}^2,{x_2}^2,...,{x_n}^2$. נניח כי $a_0+a_2+a_4+...$ וגם $a_1+a_3+a_5+...$ ממשיים. הוכיחו כי $b_0+b_1+b_2+...$ גם הוא ממשי.

6. פרקו לגורמים את $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$.

7. מצאו את כל הפולינומים P המקיימים $P(xy)=P(x)P(y)$.

8. מצאו את כל הפולינומים P עבורם $xP(x-1)=(x-7)P(x)$.

9. מצאו את כל הפולינומים P המקיימים $P(P(x))+x=P(P(x)+x)$.

10. (א) מהי שארית החלוקה שמתקבלת מהחלוקה של הפולינום $x^{2018}-1$ בפולינום $x^{41}-1$?
(ב) מצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של $10^{5778}-1$ ושל $10^{1999}-1$.

11. נתון פולינום מתוקן שמקדמיו שלמים. ידוע שכל שורשיו המרוכבים נמצאים בעיגול היחידה (כל המספרים עם ערך מוחלט שקטן או שווה ל-1). מה יכול להיות המקדם החופשי של הפולינום?

12. הוכיחו כי כל פולינום ממשי לא קבוע מתפרק למכפלה של פולינומים ממשיים ממעלות 1 ו- 2.

13. אבי רושם על הלוח את המספרים 0,1,...,5778. אם ישנו מספר שלם a ופולינום $P(x)$ שכל המקדמים שלו כבר רשומים על הלוח, כך ש $P(a)=0$, אבי רושם גם את a על הלוח. אילו מספרים יכולים להיות כתובים על הלוח?

14. האם קיים פולינום P לא קבוע בעל מקדמים שלמים, כך ש-$P(n)$ ראשוני לכל n טבעי?

15. נתון פולינום P לא קבוע עם מקדמים שלמים. מספר ראשוני q נקרא שמח אם קיים n עבורו $q\,|\,P(n)$. הראו שיש אינסוף ראשוניים שמחים.

16. $P(x)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים. נתון שקיימים 3 מספרים שלמים **שונים** a,b,c כך ש-$P(a)=P(b)=P(c)=1$. הוכח כי ל-P אין שורשים שלמים.

17. אבי ובני משחקים במשחק הבא. ראשית, אבי ממציא פולינום $P(x)$ בעל מקדמים שלמים. לאחר מכן בני מבצע מספר מהלכים: בכל מהלך בני בוחר מספר שלם a שלא נבחר קודם, ואבי אומר בקול כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה $P(x)=a$.
על כל מהלך בני משלם לאבי שקל אחד. בני מנצח כאשר אבי חוזר על מספר שאמר לפני כן, לא בהכרח ברצף.
מה המספר המינימלי של שקלים שבני צריך כדי לנצח בוודאות ?

18. על הלוח כתובים מספר פולינומים ממעלה 37, שכל מקדמיהם אי-שליליים, והם מתוקנים. בכל שלב ניתן לבחור כל שני פולינומים רשומים f ו-g ולהחליפם בשני פולינומים מתוקנים ממעלה 37, f_1, g_1 המקיימים $f_1g_1=fg$ או $f_1+g_1=f+g$. הוכיחו כי לא ייתכן שלאחר מספר סופי של מהלכים לכל הפולינומים על הלוח יהיו 37 שורשים חיוביים שונים.

19. מצא את כל הפולינומים $P(x)$ עם מקדמים שלמים, כך שלכל שלם חיובי n מתקיים ש-$P(n)\,|\,3^n-1$.

20. בהנתן פולינום $P(x)$, נסמן $\Delta P(x)=P(x+1)-P(x)$. כמו כן, נגדיר באופן רקורסיבי:

$$\Delta^0 P(x)=P(x)$$

$$\Delta^{n+1}P(x)=\Delta(\Delta^n P(x))$$

הוכיחו כי קיים n כך ש $\Delta^n P(x)=0$. מהו ה-n המינימלי עבורו זה קורה?

21. תארו את כל הפולינומים ממעלה k שנותנים ערכים שלמים בנקודות שלמות עבור:
(א) $k=2$
(ב) k כלשהו

22. במרחב תלת מימדי כל הנקודות מהצורה (a,b,c) עבור $a,b,c=0,1,\dots,N$ נצבעו בכחול, חוץ מהנקודה $(0,0,0)$ שנצבעה באדום. כמה מישורים נחוצים על מנת לכסות את כל הנקודות הכחולות, אם אסור לכסות את הנקודה האדומה?

בתאבון!