פולינומים

1. . תהי $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ סדרה של פולינומים עם מקדמים ממשיים כך שלכל n,k שלמים מתקיים ש-$P_n(k)=P_{n+k}(k)$. א. האם בהכרח $P_n=P_m$?

ב. איך תשתנה התשובה לסעיף הקודם אם בנוסף נניח שלכל הפולינומים בסדרה מקדמים שלמים?

<u>פתרון:</u> א. אפשר לבנות הכל אינדוקטיבית מאינטרפולציה של לגראנג'.

ב. נשים לב לעובדה הבאה:

$$P_n(x)\equiv P_n(x+k-n)\equiv P_{x+k}(x+k-n)\equiv P_{x+k}(x)\equiv P_k(x)\ mod\ (n-k)$$

ולכן

$$P_k(x)\equiv P_{n+mx}(x)\equiv P_n(x)\ mod\ (n+mx-k)$$

נשאיף את m לאינסוף ולקבל ש-$P_k(x)=P_n(x)$ לכל $x\neq 0$ ולכן הפולינומים שווים.

2. סדרת פולינומים $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ תקרא חשבונית אם קיים פולינום Q כך ש-$P_{n+1}=P_n+Q$. נתונה סדרה חשבונית של פולינומים שהאיבר הראשון שלה וההפרש שלה הם פולינומים מתוקנים עם מקדמים שלמים שאין להם שורש שלם משותף. בנוסף ידוע שלכל איבר בסדרה יש שורש שלם. הוכיחו כי P_1 מתחלק ב-Q ושהמנה היא פולינום לינארי.

<u>פתרון:</u> נסמן ב-x_i את השורש של P_i. ברור שכל ה-x_i-ים שונים, אחרת ה-x_i שחוזר על עצמו היה חייב לאפס את Q ולכן גם את P בסתירה לנתון.

נסמן $\gcd(P,Q)=G$ ו-$P=GP',Q=GQ'$ נקבל ש-$P_n=G(P'+(n-1)Q')$. בנוסף יש לציין של-G אין שורשים שלמים.

מבזו קיימים A,B ו-m שלם כך ש-$AP'+BQ'=m$ ולכן

$$0=P'(x_n)+(n-1)Q'(x_n)$$

ולכן

$$A(x_n)P'(x_n)+(n-1)A(x_n)Q'(x_n)=0$$

$$m-Q'(x_n)\big(B(x_n)+(n-1)A(x_n)\big)=0$$

כלומר קיימים אינסוף x_n-ים עבורם Q' מחלק את m ולכן Q' קבוע וכיוון שהוא תוקן (כי Q מתוכן) נקבל ש-$Q'=1$ ולכן $Q|P$.

בשביל להראות שהמנה לינארית נסמן $R=\frac{P}{Q}$, כלומר $P_{n+1}=Q(R+n)$ ולכן $R(x_{n+1})=-n$ וכיוון שהוא מתוקן המעלה שלו חייבת להיות אי-זוגית. אפשר למצוא שלם M כך ש-

$$(x+M)^{\deg(R)}\leq R(x)<(x+M+1)^{\deg(R)}$$

וכיוון ש-R אמור לקבל את כל המספרים מהצורה $(-n)^{\deg(R)}$ חייב להתקיים שוויון באי-שוויון השמאלי וכיוון ש-R על השלמים השליליים נקבל גם ש-$\deg(R)=1$.

3. ידוע שעבור פולינום עם מקדמים ממשיים P קיימים אינסוף זוגות של שלמים זרים (m,n) כך ש-

$$P\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

הראו ש-P לינארי.

<u>פתרון:</u> ברור של-P יש מקדמים רציונליים (נגיד מאינטרפולציה של לגראנג). נניח ש-P ממעלה לפחות 2 ונראה ש-n חייב להיות חסום, זה ינצח כי לכל n יש כמות סופית של m שעובדים ואז תהיה כמות סופית של זוגות שמקיימים את התנאי.

נסמן $d=deg(P)$. הרעיון הוא שעבור ראשוני p שמחלק את n ה-v_p של $P\left(\frac{m}{n}\right)$ מושפע רק מהמחובר עם המעלה הגבוהה. אכן אם n גדול מספיק אז קיים $p|n$ כך ש-$p^{v_p(n)}$ הרבה גדול יותר מכל המקדמים של הפולינום אז

$$v_p\left(P\left(\frac{m}{n}\right)\right)=v_p\left(a_d\left(\frac{m}{n}\right)^d\right)<v_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. קבעו האם קיים פולינום לא קבוע $Q(x)$ עם מקדמים שלמים עבורו לכל $n>2$ המספרים $Q(0),Q(1),\dots,Q(n-1)$ מקבלים לכל היותר $0.499n$ שאריות שונות מודולו n.

<u>פתרון:</u> אפשר להכפיל את הפולינום בכמות סופית של ראשוניים ובכך לגרום לכך שכל השאריות מודולו ראשוניים אלו יהיו 0 ולכן מספיק לדבר רק על n-ים ראשוניים גדולים מספיק.

באופן טבעי רוצים ש-Q יהיה ריבועי ואז הוא יקבל לכל היותר חצי מהשאריות. נרצה ש-Q יהיה ריבוע של משהו ריבועי ואז אינטואיטיבית נדלג על עוד לא מעט חזקות.

נבחר $Q=(x^2-1)^2$. $(x^2-1)=y^2$ אז $x^2=1\pm y$ כלומר בשביל ש-y^2 יתקבל בתור שארית של Q צריך ש-$1+y$ או $1-y$ יהיה שארית ריבועית.

נחשב את כמות ה-y עבורם $1+y,1-y$ לא שאריות ריבועיות:

$$\frac{1}{4}\left(\sum_y\left(1-\left(\frac{1-y}{p}\right)\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1+y}{p}\right)\right)-2\cdot\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(p+\sum_y\left(1-\left(\frac{1-y^2}{p}\right)\right)-2\cdot\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\right)$$
$$=\frac{p-2+2\left(\frac{2}{p}\right)+\left(\frac{-1}{p}\right)}{4}\geq\frac{p-5}{4}$$

כלומר אנחנו מדלגים על לפחות $\frac{p-5}{8}$ שאריות ולכן יש לכל היותר $\frac{p+1}{2}-\frac{p-5}{8}=\frac{3p+9}{8}$ שאריות ש-Q מקבל, ניצחון.

5. יהיו P,Q,R פולינומים זרים בזוגות ולא קבועים. הראו כי לכל $n\geq 3$

$$.P^n \neq Q^n + R^n$$

פתרון: מספיק לפתור עבור n ראשוני כי אם $p|n$ ו-(P,Q,R) פתרון עבור n אז $\left(P^{\frac{n}{p}},Q^{\frac{n}{p}},R^{\frac{n}{p}}\right)$ פתרון עבור p.

נניח

$$Q^p + R^p = P^p$$

נסמן ω שורש יחידה מסדר p ונפרק את צד שמאל לגורמים לינארים:

$$Q^p + R^p = \prod_{i=0}^{p-1}(Q+\omega^i R)$$

כל הגורמים מהצורה $Q+\omega^i R$ בברור זרים זה לזה כי אם היה להם שורש משותף אז הוא היה חייב להיות שורש של $Q\cdot(1-\omega^{i-j})$ ואז גם של Q וגם של R בסתירה. לפיכך כל הגורמים שצד שמאל הם חזקות p-ייות. אבל

$$(Q+R)\cdot\omega + (Q+\omega R)\cdot(1-\omega) = Q+\omega^2 R$$

נסמן $(Q+R)\cdot\omega = P'^p, (Q+\omega R)\cdot(1-\omega) = Q'^p, Q+\omega^2 R = R'^p$ ומצאנו פתרון יותר קטן כיוון שהדרגות של P',Q' קטנות מהדרגות של P,Q.

6. יהי P פולינום מתוקן עם מקדמים ממשיים כך של-$P\circ P$ ו-$P\circ P\circ P$ מקדמים שלמים. הוכיחו כי גם המקדמים של P שלמים.

פתרון: $P^3=P(P^2)$, כיוון ש-P^2 ו-P^3 מעבירים שלמים לשלמים אז P מעביר אינסוף שלמים לשלמים ולכן ל-P יש מקדמים רציונליים (לפי אינטרפולציה).
יהי r שורש של P אז $P^3(r)=P(P(0))$ ולכן r שורש של $P^3-P\big(P(0)\big)$ שזה פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים ולכן r שלם אלגברי. קיבלנו שכל השורשים של P אלגבריים ולכן המקדמים שלו שלמים אלגבריים אבל P מתוקן עם מקדמים רציונליים אז המקדמים חייבים להיות שלמים.

7. הראו כי לכל פולינום P עם מקדמים ממשיים ולכל שלם חיובי n קיים פולינום עם מקדמים ממשיים Q כך ש-$(1+x^2)^n|P(x)^2+Q(x)^2$.

פתרון: מספיק למצוא Q כך ש-$(1+x^2)^n|1+Q^2$. נסמן

$$(1+x^2)^n = \big((x+i)\cdot(x-i)\big)^n = (R(x)+S(x)\cdot i)(R(x)-S(x)\cdot i)$$

מספיק למצוא Q עבורו $R+S\cdot i|1+Q\cdot i$ כלומר אנחנו מחפשים A,B עבורם

$$(R+S\cdot i)\cdot(A+B\cdot i) = 1+Q\cdot i$$

צריך להתקיים $RA-BS=1$, ניתן למצוא פולינומים כאלו כיוון ש-R,S זרים. אחרי שמצאנו R,S נבחר $Q=RB+SA$ וננצח.

8. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים שלמים P כך שלכל x,y ממשים, אם $P(x)$ ו-$P(y)$ שלמים אז גם $P(xy)$ שלם.

<u>פתרון:</u> למה: לכל P פולינום עם מקדמים שלמים קיים שלם n כך ש-$P-n$ אי-פריק.

הוכחה: נזיז את P כך שהמקדם החופשי יהיה ראשוני גדול q. נניח ש-$P-n$ מתפרק, כיוון שהמקדם החופשי ראשוני נקבל שהמקדם החופשי של אחד הגורמים הוא ± 1 ולכן ערך מוחלט של מכפלת השורשים של הגורם הזה הוא 1 ולכן יש לגורם הזה שורש (נסמן אותו ב-r) שערכו המוחלט לא עולה על 1. נקבל ש-$P(r)=n$ ולכן $|n|$ קטן או שווה לסכום הערכים המוחלטים של המקדמים של P בסתירה לכך ש-n גדול.

נחזור לשאלה. ללא הגבלת הכלליות נניח שהמקדם המוביל של P חיובי. יהי n כך ש-$P-n$ שלם ו-r שורש ממשי שלו (יש שורש ממשי כי P על החל ממקום מסוים). ברור ש-$P(r)$ שלם וכך גם $P(2)$ ולכן $P(2r)$ שלם. נשים לב ש-r הוא שורשם גם של הפולינום $P(2x)-P(2r)$ שיש לו מקדמים שלמים אבל $P-n$ הוא הפולינום המינימאלי של r ולכן

$$P(x)-n|P(2x)-P(2r)$$

אלו פולינומים מאותה המעלה והמקדם המוביל של אגף ימין גדול פי $2^{\deg(P)}$ מהמקדם המוביל של אגף שמאל ולכן

$$2^{\deg(P)}(P(x)-n)=P(2x)-P(2r)$$

מכאן מייד נובע של-P לא יכולים להיות מקדמים חוץ מהמוביל והחופשי. נסמן $P=ax^d+b$ ברור ש-$P\left(a^{-\frac{1}{d}}\right)=b+1$ שלם ולכן $P\left(a^{-\frac{2}{d}}\right)=\frac{1}{a}+b$ שלם ולכן $a=\pm 1$. קל לראות שהפולינומים האלו עובדים כי

$$x^ny^n+b=(x^n+b-b)(y^n+b-b)+b.$$

9. יהי $n\geq 4$ ו-P,Q פולינומים מרוכבים. ידוע ש-

$$P\big(Q(x)\big)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+2023$$

הוכיחו כי לפחות אחד מבין P,Q לינארי.

<u>פתרון:</u> נסמן $Q=ax^{d_1}+bx^{d_1-1}+\ldots$, $P=\frac{1}{a}x^{d_2}+\ldots$ ונניח ש-$d_1,d_2>1$.

$$P\big(Q(x)\big)=x^{d_1d_2}+\frac{b}{a}\cdot d_2x^{d_1d_2-1}+\ldots$$

כלומר $\frac{b}{a}=\frac{1}{d_2}$ ולכן סכום השורשים של Q הוא $-\frac{1}{d_2}$.

נשים לב שעבור r-שורש של P, השורשים של $Q-r$ הם גם השורשים של $P\circ Q$ אבל סכום השורשים של $Q-r$ הוא סכום השורשים של Q (כי המקדם של x^{d_1-1} לא משתנה) ולכן סכום השורשים של $Q-r$ הוא $-\frac{1}{d_2}$ אבל השורשים האלו הם שלמים אלגבריים ולכן סכומם שלם אלגברי שהוא גם רציונלי ולכן הוא שלם ולכן $d_2=1$.

10. יהי n שלם גדול מ-1. שני פולינומים P, Q יקראו *דמי-בלוקים* אם לכל $i \in \{1,2,\dots,n\}$ מתקיים ששתי הסדרות הבאות

$$P(2015i), P(2015i-1), \dots, P(2015i-2014)$$

$$Q(2015i), Q(2015i-1), \dots, Q(2015i-2014)$$

הן תמורות זו של זו.

א. הוכיחו כי קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה $n+1$ שהם דמי בלוקים.

ב. הוכיחו כי לא קיימים שני פולינומים שונים P, Q ממעלה n שהם דמי בלוקים.

<u>פתרון:</u> למספרים $2015i, 2015i-1, \dots, 2015i-2014$ נקרא בלוקים.

א. נבחר $P(x) = x(x-2015)(x-2\cdot 2015)\cdot \dots \cdot (x-2015n)$

ו-$Q(x) = P(x-1)$.

שני הפולינומים האלו עובדים מכיוון של-$P(x)$ יש שורשים בתחילת כל בלוק ולכן כאשר נזיז אותו באחד נקבל פולינום שבפנים של הבלוק נראה אותו דבר אבל הפעם השורשים הם בסוף הבלוקים ולא בהתחלה.

ב. נניח בשלילה כי קיימים שני פולינומים P, Q ממעלה n שהם דמי בלוקים ושונים. נתמקד בבלוק אחד ונשים לב כי עבור אחד המספרים השלמים בבלוק (כאן מספר שלם בבלוק הוא אחד מהמספרים $2015i, 2015i-1, \dots, 2015i-2014$) מתקיים ש-$P(x_1) > Q(x_1)$ ובאותו אופן עבור אחד המספרים השלמים מתקיים גם הדבר ההפוך- $P(x_2) < Q(x_2)$. מערך הביניים נקבל שקיימת נקודה (לא בהכרח שלמה) בתוך הבלוק עבורה $P(x) = Q(x)$. ברור שהפולינום $P-Q$ הוא ממעלה n לכל היותר ולכן יש לו לכל היותר n שורשים ולכן בכל אחד מהבלוקים יש בדיוק ערך אחד עבורו $P = Q$.

כעט נתבונן בפולינום $P+Q$, המטרה שלנו היא להוכיח שהפולינום הזה קבוע.

נתבונן בבלוק מסוים ונסמן ב-M את הערך המקסימלי ש-P מקבל בנקודות השלמות בבלוק וב-m את הערך המינימלי.

הוכחנו שבתוך הבלוק יש בדיוק נקודה אחת שבה $P = Q$, נסמן אותה x_0, לכן בלי הגבלת הכלליות נניח שלפני נקודה זו P גדול מ-Q ואחריה P קטן מ-Q. לפיכך נקבל כי P חייב לקבל את הערך M לפני נקודה השוויון ואת m אחריה, Q כמובן מתנהג הפוך.

נתבונן בנקודה שבה P מקבל את M, ברור שערכו של $P+Q$ בנקודה זו הוא לפחות כערכו של $P+Q$ בנקודה שבה P מקבל את m, זאת מפני שכאשר P מקבל את M, Q מקבל לפחות את m וכאשר P מקבל את m, Q מקבל לכל היותר את M.

כלומר קיים זוג נקודות כך שהראשונה לפני x_0 והשנייה אחרי x_0 כך שערכו של-$P+Q$ בנקודה הראשונה הוא לפחות כערכו של $P+Q$ בנקודה השנייה ולכן קיימת נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ אי-חיובית.

נשים לב שאנו יכולים לעשות בדיוק את אותו הטיעון על Q אבל הפעם הנקודה שבה Q מקבל את M תהיה לפני הנקודה שבה Q מקבל את m ולכן הפעם נקבל נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ אי-שלילית ולכן מערך הביניים נקבל נקודה בבלוק שבה הנגזרת של $P+Q$ מתאפסת.

קיבלנו שהנגזרת של $P+Q$ מתאפסת בכל אחד מהבלוקים אבל יש לנו n בלוקים והמעלה של הנגזרת של $P+Q$ היא $n-1$ ולכן הנגזרת של $P+Q$ היא 0 זהותית ולכן $P+Q$ פולינום קבוע.

נזיז את P,Q בקבוע כך שיתקיים ש-$P+Q=0$, כלומר $P=-Q$. כבר אמרנו שבכל בלוק יש ל-P,Q נקודת שוויון, כלומר אחרי ההזזה ל-P יש שורש בכל בלוק ובנוסף כמות הערכים החיוביים והשליליים של P בנקודות שלמות של כל בלוק זהה ולכן השורש של P נמצא בדיוק באמצע של כל בלוק ולכן הנוסחה ל-P היא:

$$P(x)=k\cdot\prod_{i=1}^{n}(x+\frac{2015-1}{2}-2015i)$$

נשאר לשים לב כי 1 רחוק יותר מהשורשים של P מכל נקודה אחרת בבלוק הראשון, כלומר $|P(1)|>|P(x)|$ לכל $2\leq x\leq 2015$ וזו בברור סטירה לכך ש-P ו-$-P$ דמי בלוקים.