

## תרגיל פולינומי לרותם

1. הראו כי לפולינום  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = n^2$  יש שורש רציונלי.

2. פולינום ממעלה 2019 מקיים  $P(n) = \frac{1}{n^2}$  כאשר  $n = 1, 2, 3, \dots, 2020$ .

מצאו את  $P(2021)$ .

3. מצאו את כל הזוגות של פולינומים  $P, Q$  עם מקדמים רציונליים שמקיימים  $P^3 + Q^3 = x^{12} + 1$ .

4. המספרים הממשיים  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  מקיימים:  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$ ,  $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = 2$ , ואת אי-השוויון

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 > \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_2} - \frac{1}{2\alpha_3} \right)^2$$

תומר רושם על הלוח את כל 9 הטענות מסוג  $\alpha_i < \beta_j$ . הוכיחו כי כמות הטענות השגויות אצל תומר היא ריבוע זוגי.

5. יהי  $p$  פולינום עם מקדמים שלמים שדרגתו  $n > 1$ . הוכיחו כי לפולינום  $p(p(p(\dots p(x)\dots)))$  יש לא יותר מאשר  $n$  נקודות שבת שלמות.

6. הוכיחו כי הפולינום  $x^{3072} + 5779x^{1024} + 2018$  אי פריק מעל שלמים.

7. לכל פולינום  $f$  במקדמים שלמים נגדיר  $f_n(x) := f(f(\dots f(x)\dots))$  כאשר  $f$  מופיע  $n$  פעמים. תארו את כל הפולינומים  $f$  עבורם  $n \mid f_n(x) - x$  לכל  $n$  טבעי ולכל  $x$  שלם.

8. הראו שהפולינום  $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$  אי-פריק מעל שלמים.

9. נתון מספר מרוכב  $A$ , מספר טבעי  $d$ , ומספר חיובי  $q > 1$  המקיימים  $|A|^2 = \frac{1}{q^d}$ . הראו ששורשי

הפולינום  $A(x^d - x^{d-1}) - \frac{x}{q} + 1 = 0$  נמצאים על מעגל אחד במישור המרוכב.

**בתאבון!**