

פולינומים!

כל הפולינומים הם עם מקדמים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת

1. יהא P פולינום. נגדיר $Q(x) = (x - 1)P(x)$. האם יכול להיות שכל המקדמים של Q חיוביים?
2. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של מונומים בעלי מעלות זוגיות שווה לסכום המקדמים של מונומים בעלי מעלות אי-זוגיות. יהא P פולינום כלשהו ו- Q פולינום מגניב. האם PQ בהכרח מגניב?
3. יהא $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ פולינום בעל 5 שורשים ממשיים. כמה שורשים ממשיים יש לפולינום $Q(x) = x^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$? מצאו את כל האפשרויות.
4. נתון פולינום מתוקן במקדמים שלמים, שכל שורשיו המרוכבים הם בתוך עיגול היחידה (ולא על השפה). מצאו את כל האפשרויות למקדם החופשי של הפולינום.
5. יהא P פולינום ממעלה 100 שכל שורשיו שונים. האם יתכן שיש לו בדיוק 37 שורשים ממשיים?
6. הוכיחו שניתן לפרק כל פולינום לגורמים ריבועיים ולינאריים אי-פריקים (למשל: $(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$).
7. יהא $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום עם מקדמים מרוכבים, המקיים $a_0 + a_2 + a_4 + \dots$ וכן $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ שניהם ממשיים. נסמן את $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ את שורשיו (הלאו דווקא שונים) של P . יהא $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ פולינום ששורשיו הם $\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2$. הוכיחו כי $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ ממשי.
8. פרקו לגורמים אי-פריקים את הפולינום $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120$.
9. חשבו את $\gcd(\overbrace{111 \dots 1}^{2025}, \overbrace{111 \dots 1}^{5785})$.
10. האם הפולינום $x^{2025} + x^{200} + 2x^{72} - 5$ מתחלק בפולינום
א. $x^7 + x^3 - 2$ ב. $x^2 + x + 1$ ג. $x^3 + x + 3$?
11. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $P(xy) = P(x)P(y)$.
12. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $xP(x - 1) = (x - 7)P(x)$.
13. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $P(P(x)) + x = P(P(x) + x)$.
14. מצאו את כל הזוגות של פולינומים מתוקנים (בעלי מקדם מוביל 1) P, Q המקיימים
 $P(P(x)) + Q(Q(x)) = P(Q(x)) + Q(P(x))$
15. איילה כותבת מספר פולינומים מתוקנים ממעלה 2025, שכל מקדמיהם אי-שליליים. בכל מהלך ניתן לבחור שני פולינומים P, Q ולהחליפם בפולינומים P_1, Q_1 ממעלה 2025 המקיימים $P_1Q_1 = PQ$ או $P_1 + Q_1 = P + Q$. האם איילה יכולה לבחור פולינומים התחלתיים, כך שלאחר מספר סופי של מהלכים, נגיע למצב בו כל הפולינומים הרשומים על הלוח הם בעלי 2025 שורשים חיוביים שונים?
16. יהא P פולינום המקיים $P(\sin \theta) = P(\cos \theta)$ לכל θ ממשי. הוכיחו כי קיים פולינום Q כך ש- $P(x) = Q(x^4 - x^2)$.
17. נתונים פולינומים P, Q המקיימים $P(z) = 0$ אם $Q(z) = 0$ וכן $P(z) = 1$ אם $Q(z) = 1$. הוכיחו כי $P = Q$.
18. יהיו P, Q, R פולינומים זרים בזוגות ולא קבועים, ויהא $n \geq 3$. הוכיחו כי $P^n + Q^n \neq R^n$.