

פולינומים שלמים

כל הפולינומים בדף זה הם עם מקדמים שלמים (חוץ משאלה 6)

1. האם קיים פולינום P , כך שמתקיים
 $P(1)=1, P(2)=4, P(3)=9, P(4)=16, P(5)=37$?
2. עבור אילו ערכי n קיים פולינום מתוקן ממעלה n כך שלכל a, b, c שלמים,
 $P(a) \cdot P(b) \neq P(c)$?
3. נתון פולינום $P(x)$ ממעלה $n > 5$ עם מקדמים שלמים, שיש לו n שורשים שלמים שונים.
הראו כי לפולינום $P(x) + 3$ יש n שורשים ממשיים שונים.
4. נתון פולינום לא קבוע P . האם בהכרח קיים n שלם כך שלמספר $P(n)$ יש מחלק ראשוני
שגודל מ-1000000?
5. מספר שלם k יקרא מוצלח, אם ניתן לפרק את הפולינום
 $x^4 + 14x^3 + 62x^2 + kx + 33$
למכפלה של שני פולינומים שהמקדמים שלהם שלמים, והדרגות קטנות מ-4.
כמה מספרים מוצלחים קיימים?
6. נתון פולינום P מתוקן (מקדם מוביל = 1) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או
חצי-שלם, P יהיה מספר שלם?
7. פולינום P נקרא קטן עם לכל n טבעי, מתקיים $|P(n)| \leq 1000^n$. האם קבוצת הפולינומים
הקטנים היא סופית או אינסופית?
8. בהינתן פולינום P ומספר טבעי n , נסמן ב- $\#_n$ את כמות זוגות השלמים (a, b) המקיימים
 $0 < a < b \leq n$ וכן $P(a) - P(b)$ מתחלק ב- n . מצאו את כל הפולינומים P בעלי מקדמים
שלמים כך ש- $\#_n \leq 2021$ לכל n שלם חיובי.
9. נתון הפולינום $P_1(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5774^{5775}x$. נסמן ב- $P_{5775}(x)$ את ההרכבה שלו על עצמו
5775 פעמים. האם קיים a שלם עבורו מתקיים:
 $P_{5775}(a) - P_1(a) = P_{5775}(a + 5774) - P_1(a + 5774)$?
10. האם ניתן לחלק את המספרים מ-1 עד 2016 למחלקות בגודל 7, כך שסכום המספרים בכל
מחלקה מתחלק ב-2017, וגם סכום ריבועי המספרים בכל מחלקה מתחלק ב-2017?
11. לכל פולינום P במקדמים שלמים נגדיר $P_n(x) = P(P(\dots P(x)))$ כאשר P מופיע n
פעמים. תארו את כל הפולינומים P עבורם $n | P_n(x) - x$ לכל n טבעי ולכל x שלם.

בתאבון!