משוואות Pell

משוואת פל זו המשוואה $x^2 - dy^2 = 1$ כאשר d טבעי (שאינו ריבוע).

משפט: יש פתרון לא טריוויאלי (יסודי) למשוואת פל (x_1, y_1) המקיים שכל הפתרונות הם מהצורה $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$.

1. הוכיחו שאם $3n + 1, 4n + 1$ ריבועים אז $56|n$.

2. אם $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ שלם אז הוא ריבוע.

3. מצאו את כל המספרים שהם גם משולשים וגם ריבועים.

4. נסתכל על משוואת פל השלילית $x^2 - dy^2 = -1$.
א. הראו אם $p|d$ הוא $3 \; mod \; 4$ אז אין פתרון.
ב. הראו שהכיוון ההפוך לא' לא נכון.
ג. הראו שאם $p = d$ ראשוני שהוא $1 \; mod \; 4$ אז יש פתרון.
ד. הראו שאם $d = pq$ ו$p, q \equiv 1(4)$ וגם $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ אז יש פתרון.

5. (x_n, y_n) הפתרון הn למשוואת פל $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ ($(x_0, y_0) = (1,0)$). יהי p ראשוני אי זוגי.
א. הוכיחו ש (x_n, y_n) מחזורי מודולו p ומצאו מחזור.
ב. נניח ש $p|y_k$ הוכיחו ש$v_p(y_{k\ell}) = v_p(y_k) + v_p(\ell)$.

6. נניח ש $4 + \frac{n^2+1}{m^2}$ הוא ריבוע שלם, הראו שהוא שווה ל-9.

7. פתרו בשלמים $(2^n - 1)(3^m - 1) = x^2$.

8. הוכיח שיש אינסוף רביעיות שלמים חיובים זרים (x, y, z, t) כך ש
$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4$$

9. הוכיחו שלכל $n > 2$ יש שלמים חיוביים $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots . b_n$ כך ש- $a_i a_{i+1} = b_i^2 + i$ (שעבורנו $a_{n+1} = a_1$).

10. נניח $x^2 - dy^2 = \pm 1$ פתרון למשוואת פל עבורו y הוא d-חלק (כל גורם ראשוני שלו נמצא בd). אזי (x, y) הוא הפתרון היסודי.

11. א. פתרו את המשוואה $5^a - 3^b = \pm 2$.
ב. משפט Størmer – תהי $S = \{p_1, \dots, p_r\}$ קבוצת ראשוניים, אז יש לכל היותר $3^r - 2^r$ זוגות מספרים S-חלקים שהפרשם 1 או 2.

12. הראו כי למשוואה $y^2 + 1 = x^n$ אין פתרונות שלמים מלבד $(x, y) = (1,0)$.

13. אם m, n, p שלמים חיוביים כך ש $m + n + p - 2\sqrt{mnp} = 1$ אז לפחות אחד מהם הוא ריבוע.

14. נניח שa, b מספרים טבעיים גדולים מ1 וחסרי ריבועים. אז אחת מהמשוואות $ax^2 - by^2 = 1$, $ax^2 - by^2 = -1$ היא חסרת פתרון.

15. נניח כי x, y מספרים שלמים עבורם $x(y + 1), y(x + 1)$ שניהם ריבועים. הראו כי אחד מבין x, y הוא ריבוע.

16. נסמן (x_n, y_n) הפתרונות למשוואת פל. הראו ש x_{4n} איננו ריבוע.

17. ** הראו כי הפתרונות היחידים למשוואה $y^2 = x^3 + 1$ הם $(0,1), (3,2)$.

18. נסמן (x_n, y_n) הפתרונות למשוואת פל $x^2 - dy^2 = 1$.
א.* הראו שאם x_n ריבוע וn איזוגי אז x_1 ריבוע.
ב. *** הראו שאם x_n ריבוע אז $n = 1,2$.

19. פתרו את המשוואה $x^2 - 48 \cdot y^4 = 1$ בשלמים.

20. * מצאו את כל המספרים שהם משולשים, ריבועים ומחומשים.

21. * מצאו את כל הטבעיים $k < 100$ כך שיש $n \neq 0$ שלם עבורו המספרים $2n^2 + 1, kn^2 + 1, 2kn^2 + 1$ כולם ריבועים.