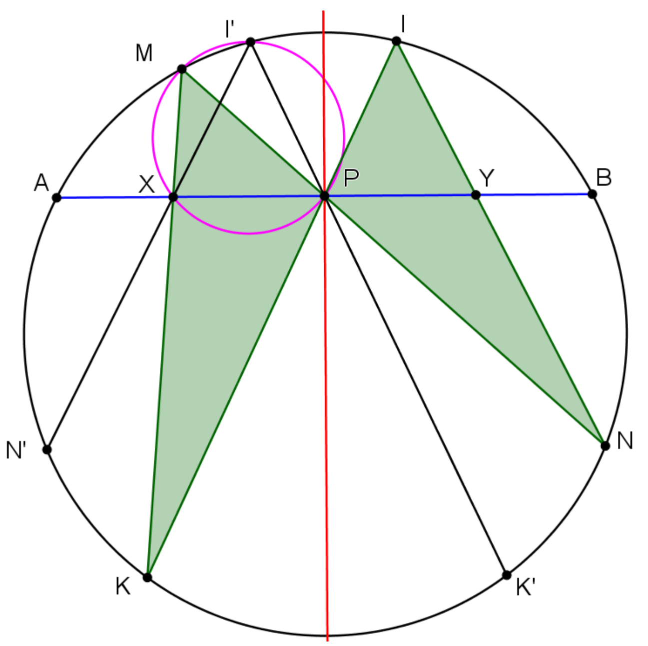
פרפר

משפט הפרפר: יהי AB מיתר של מעגל ω ו-P אמצע AB. על ω נבחרו נקודות M, I, N, K כך ש-MN, IK נחתכים ב-P ו-IN, MK נחתכים עם AB ב-X, Y. אז נובע ש-$XP = YP$.

הוכחה ראשונה: נסמן ב-I', K' את השיקופים של I, K ביחס לאנך האמצעי של AB. נשים לב ש-

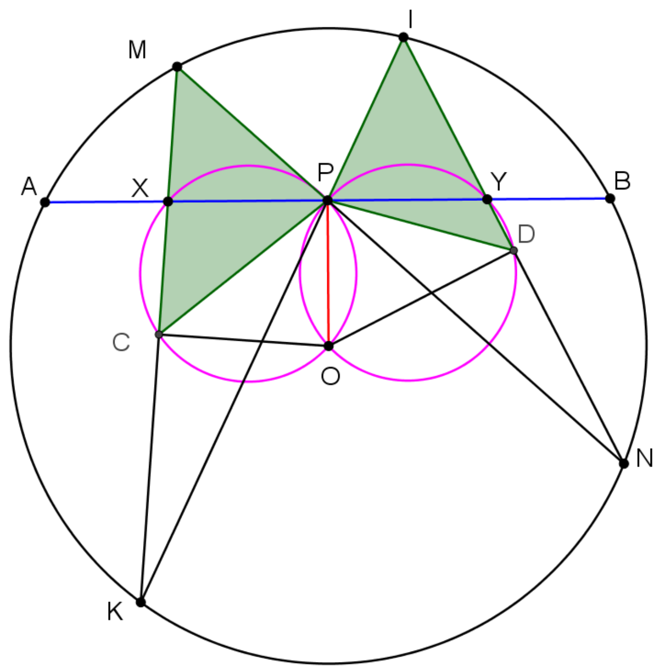
$$\angle I'MX = 180° - \angle I'K'K = 180° - \angle I'PX$$



(כאשר השוויון השני נובע ממקבילות) ולכן $MXPI'$ מעגל. מכאן נובע ש-

$$\angle XI'K' = \angle XI'P = \angle XMP = \angle KIN$$

כלומר XI' נחתך עם ω שנית בנקודה N'- הסימטרית ל-N ביחס לאנך האמצעי של AB. נבחין כי Y היא החיתוך NI עם AB והוכחנו כי X היא החיתוך של $I'N'$ עם AB ולכן X, Y סימטריות ביחס לאנך האמצעי של AB.



הוכחה שנייה: נסמן את המרכז של ω ב-O ואת אמצעי המיתרים MK, IN ב-C, D בהתאמה. נשים לב שהמשולשים MKP, INP דומים וכיוון ש-C, D הן אמצעי הצלעות המתאימות נובע שגם המשולשים MCP, IDP דומים. נציין גם שהמרובעים $XPOC, YPOD$ חסומים במעגל שהקטרים שלהם הם XO, YO. נשאר לשים לב ש-

$$\angle XOP = \angle XCP = \angle YDP = \angle YOP$$

כאשר השוויון הראשון והאחרון נובעים מהמעגלים והשוויון האמצעי מדמיון המשולשים. הוכחנו שבמשולש XOY, OP הוא גם הגובה וגם חוצה הזווית ולכן הוא גם התיכון.

הוכחה שלישית: תהי L נקודה על ω כך ש-$LI||AB$. מסימטריה ברור ש-$LP = LI$ וביחד עם מקבילות נקבל ש-

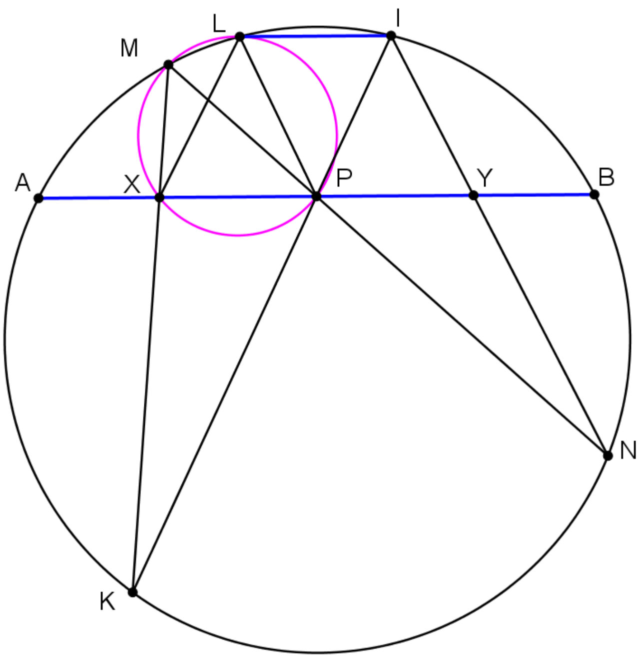
$$\angle LPX = \angle PLI = \angle LIP = \angle IPY$$

בשביל להוכיח ש-$XP = PY$ עלינו להוכיח שהמשולשים XPL, YPI חופפים ולכן מספיק להוכיח ש-$\angle XLP = \angle YIP$.

נשים לב ש-

$$\angle KML = \angle 180° - \angle LIK = 180° - \angle LPX$$

ולכן המרובע $XMLP$ חסום במעגל ולפיכך $\angle XLP = \angle XMP = \angle PIY$, כרצוי.

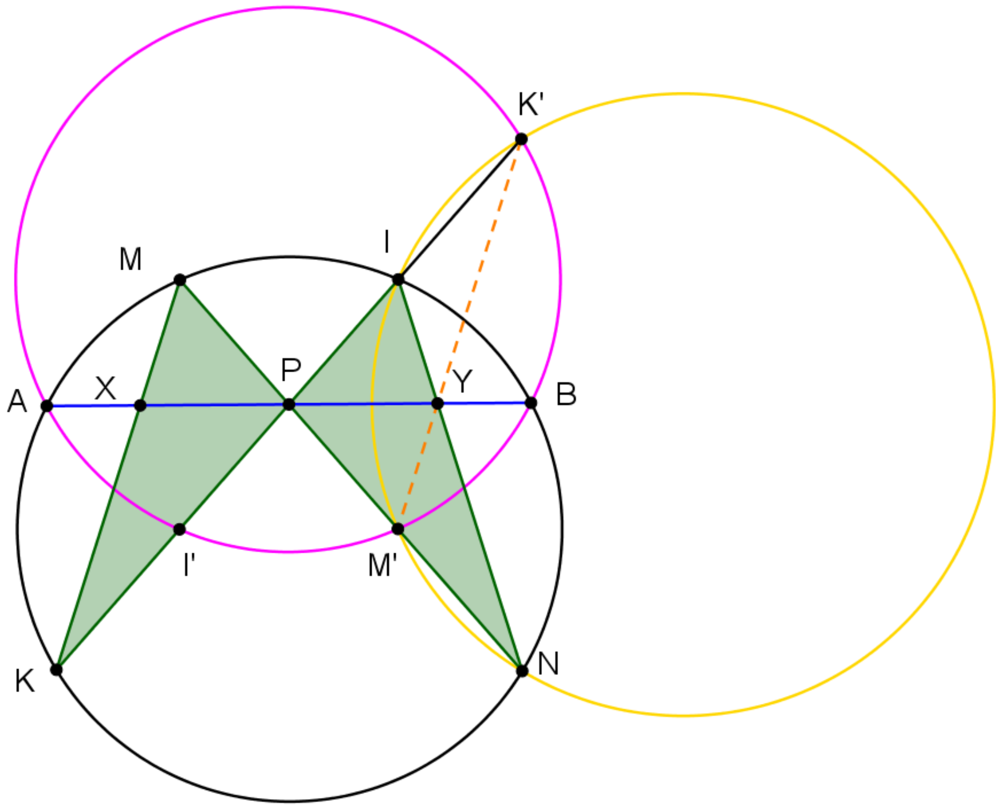


הוכחה רביעית:

נסמן ב-M', I', K' את השיקופים של M, I, K ביחס ל-P. מדרגת נקודה מקבלים ש-

$$PI \cdot PK' = PI \cdot PK = PM \cdot PN = PM' \cdot PN$$

ולכן $NM'IK'$ מעגל. בנוסף ברור ש-$ABM'I'K'$ נמצאות על מעגל אחד-השיקוף של ω ביחס ל-P.
כעט מצירים רדיקליים נקבל ש-$AB, IN, M'K'$ נפגשים בנקודה ולכן Y נמצאת על השיקוף של MK ביחס ל-P וזה מה שרצינו.



הוכחה חמישית:

למה: יהיו A, B, C, D נקודות כך שאף 3 לא על ישר אחד ותהי $f = 0$, משוואה של שניונית שעוברת ב-A, B, C, D. אז ניתן להציג את f בצורה הבאה:

$$f = \lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{AC} \cdot l_{BD}$$

כאשר l_{AB} זו משוואת הישר AB (ושאר ה-l מוגדרים באופן דומה).

הוכחת הלמה: נבחרת מערכת צירים שבה ציר ה-x מתלכד עם AB וציר ה-y עם AC. נסתכל על הצמצום של הפונקציות $\lambda x \cdot l_{CD} + \mu y \cdot l_{BD}$ ו-f על ציר y (כאשר $x = 0$). מתקבלות שתי משוואות ריבועיות במשתנה 1, ושתיהן מתאפסות ב-A, C ולכן ניתן לבחור את μ כך שעל ציר ה-y המשוואות יתלכדו. באופן דומה אפשר לבחור את λ כך ששתי הפונקציות יתלכדו גם על ציר ה-x. סך הכל הצלחנו לבחור את λ, μ כך שהפונקציה

$$f - \lambda x l_{CD} + \mu y \cdot l_{BD}$$

מתחלקת ב-xy אבל זו משוואה ריבועית ולכן היא שווה ל-cxy עבור קבוע c. נשאר לציין ש-$f - \lambda x l_{CD} + \mu y \cdot l_{BD}$ מתאפס ב-D אבל xy לא מתאפס ב-D ולכן $c = 0$ וקיבלנו ש-

$$f = \lambda x l_{CD} + \mu y \cdot l_{BD} \blacksquare$$

מסקנה מהלמה: עבור שתי שניוניות f, g שנחתכות בנקודות A, B, C, D, ניתן להציג כל שניונית h שעוברת ב-A, B, C, D כקומבינציה של f, g:

$$h = \lambda f + \mu g.$$

כעת נוכיח את המשפט!

נתבונן בשלוש שניוניות שכולן עוברות ב-M, I, N, K: $\omega, l_{MN} \cdot l_{KL}, l_{MK} \cdot l_{IN}$. כפי שהוכחנו ניתן לבחור μ, λ כך שיתקיים ש-

$$l_{MK} \cdot l_{IN} = \mu\omega + \lambda l_{MN} \cdot l_{KL}$$

נניח ש-P זו ראשית הצירים ו-AB הוא ציר ה-x. נצמצם את המשוואה הזו על ציר ה-x. נשים לב ש-$l_{MN} \cdot l_{KL}$ מתאפס ב-P ולכן הצמצום של הפונקציה הזו על AB הוא $x^2 = 0$. בנוסף נזכר ש-P הוא אמצע מיתר של ω ולכן הצמצום של ω על ציר ה-x הוא מהצורה $x^2 + a = 0$ ולכן

$$l_{MK} \cdot l_{IN} = \mu(x^2 + a) + \lambda x^2 = (\mu + \lambda)x^2 + a\mu$$

כלומר הצמצום של $l_{MK} \cdot l_{IN}$ על ציר ה-x סימטרי ביחס לראשית ובפרט השורשים שלו סימטריים ביחס ל-P וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

שאלות.

משפט הפר פר: יהי AB מיתר של מעגל ω ונקודות Q, R על AB כך ש-$AQ = BR$. על ω נבחרו נקודות M, I, N, K כך ש-MI עובר דרך Q ו-NK עובר דרך R. הישרים MN, IK נחתכים עם AB בנקודות C, D. הוכיחו כי $AC = BD$.

הוכחה: נסמן ב-I', N' את השיקופים של I, N ביחס לאנך האמצעי של AB. נסמן את החיתוך השני של $I'C$ עם ω ב-K'. מספיק להוכיח ש-N', Q, K' נמצאות על ישר אחד כי זה יוכיח ש-K' היא השיקוף של K ביחס לאנך האמצעי של AB וזה יגיד ש-C, D סימטריות גם הן ביחס לאנך האמצעי.

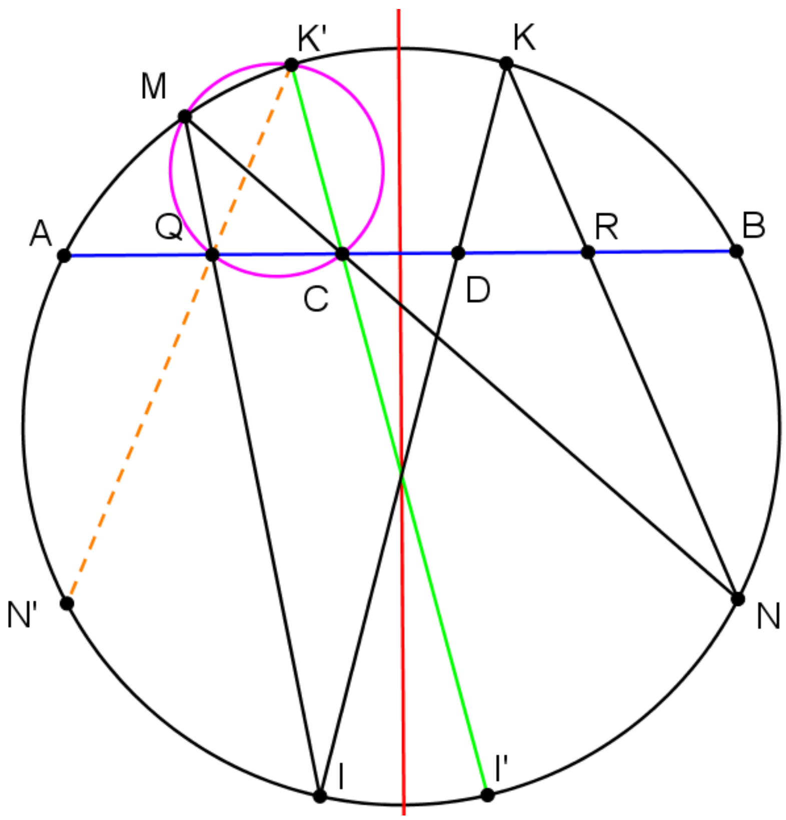
נבחין ש-$II' || QC$ ולכן

$$\angle MK'I' = 180° - \angle MII' = 180° - \angle MQC$$

$MQCK'$ חסום במעגל. מכאן נובע ש-

$$\angle QK'C = \angle QMC = \angle IMN = \angle IKN = \angle N'KI' = \angle N'K'I'$$

ולכן N', Q, K' על ישר, כנדרש.



משפט הפרפרפר: במעגל ω חסומים שני מרובעים עם חיתוכים עצמיים $MINK, M'I'N'K'$. הישר AB חותך את צלעות המרובע $MINK$ ב-P, Q, R, S ואת הצלעות של $M'I'N'K'$ ב-P', Q', R', S'. הוכיחו כי שלוש מבין P, Q, R, S מתלכדות עם שלוש נקודות מתאימות מבין P', Q', R', S' אז גם הנקודה הרביעית מתלכדת.

הוכחה: נניח ש-$P = P', Q = Q', R = R'$ ונוכיח שגם S, S' מתלכדות. נסמן את המשוואה של ω ב-f, אז קיימים $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ כך ש-

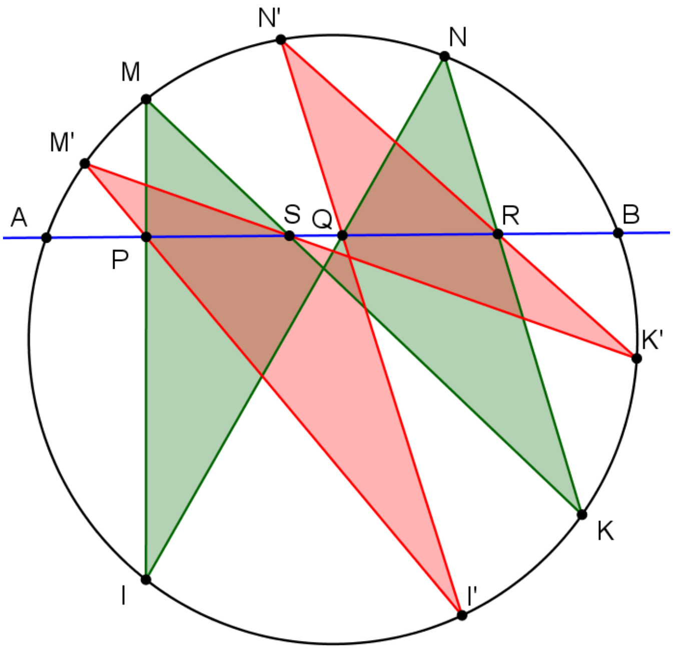
$$f = \lambda l_{MI} \cdot l_{NK} + \mu l_{MK} \cdot l_{IN} = \lambda' l_{M'I'} \cdot l_{N'K'} + \mu' l_{M'K'} \cdot l_{I'N'}$$

הצמצום של המשוואה הזו לישר AB נראה כך:

$$\begin{aligned} &a(x-p)(x-r) + b(x-q)(x-s) \\ &\qquad = c(x-p)(x-r) + d(x-q)(x-s') \end{aligned}$$

כלומר

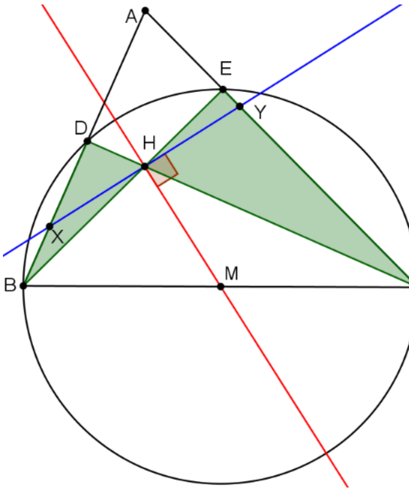
$$(a-c)(x-p)(x-r) = (x-q)\big(d(x-s') - b(x-s)\big)$$



אבל $(x-p)(x-r)$ לא מתחלק ב-$(x-q)$ ולכן

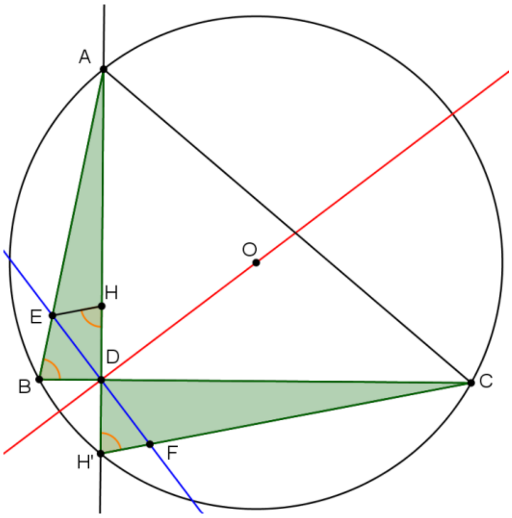
$$d(x-s') - b(x-s) = 0$$

ולכן $s = s'$.



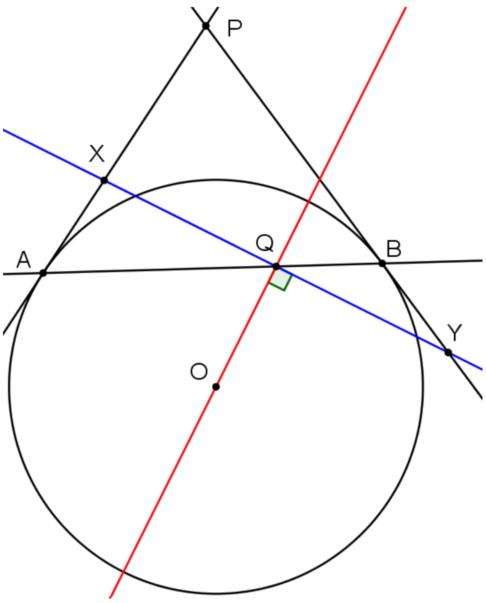
1. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC ו-M היא אמצע הצלע BC. האנך ל-MH ב-H נחתך עם AB,AC בנקודות X,Y. הוכיחו כי H היא אמצע XY.

<u>פתרון:</u> נסמן ב-D,E את עקבי האנכים מ-C,B. $BCED$ חסום במעגל שמרכזו M והשאלה נובעת מייד מפרפר.



2. H,O הם מרכז המעגל החוסם ומפגש הגבהים במשולש ABC, בהתאמה. D היא עקב האנך מ-A ל-BC. האנך ל-OD ב-D נחתך עם AB ב-E. הוכיחו כי $\angle EHD = \angle ABC$.

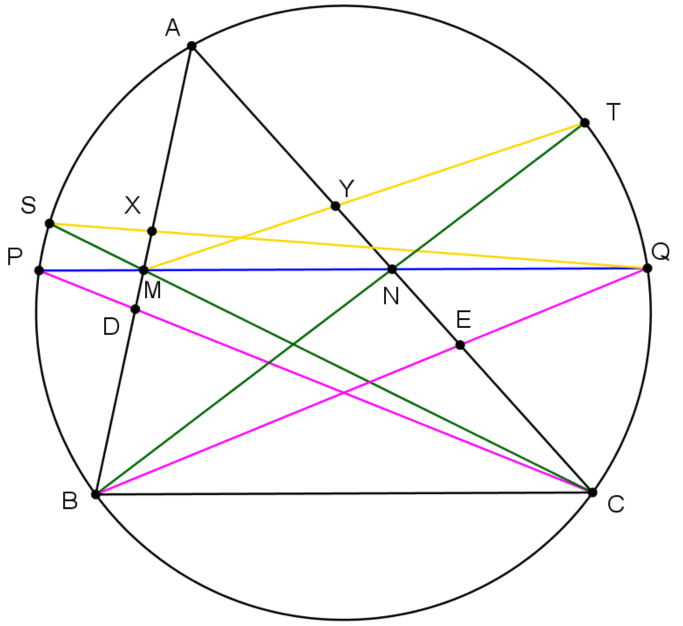
<u>פתרון:</u> נסמן ב-H' את החיתוך של AD עם המעגל החוסם וב-F את החיתוך של DE עם CH'. ממשפט פרפר נובע ש-$ED = FD$ אבל כידוע $HD = H'D$ ולכן $EH||FH'$ ולכן $\angle ABC = \angle AH'C = \angle EHD$.



3. נתון מעגל Ω ונקודה P מחוץ למעגל. A,B נקודות על Ω כך ש-AP,BP משיקים ל-Ω. תהי Q נקודה על המיתר AB. האנך ל-QO ב-Q נחתך עם AP,BP בנקודות X,Y. הוכיחו כי $XQ = YQ$.

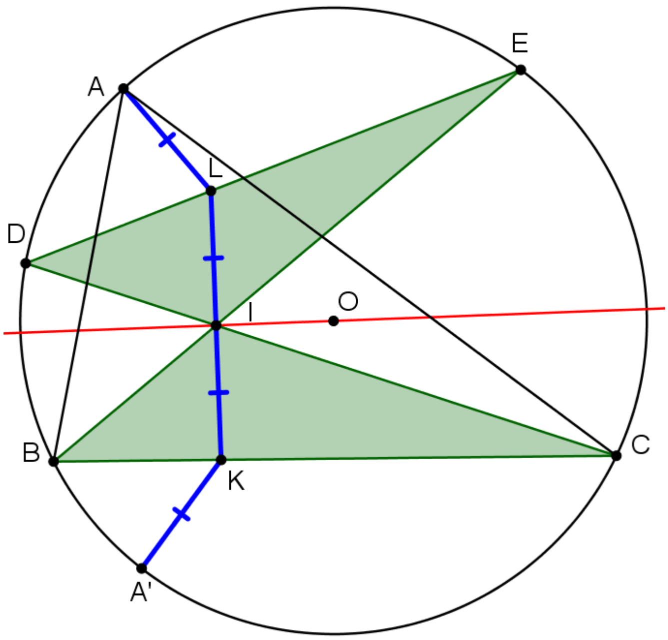
<u>פתרון:</u> פרפר מנוון $AABB$.

4. M,N הן אמצעי הצלעות AB,AC במשולש ABC שחסום במעגל ω.
הישר MN נחתך עם ω בנקודות P,Q (P שייכת לקשת הקטנה $\widehat{AB}$).
הישרים BN,CM נחתכים עם ω בנקודות T,S בהתאמה. הצלע AB נחתכת עם CP,QS בנקודות D,X בהתאמה. הצלע AC נחתכת עם BQ,PT בנקודות E,Y. הוכיחו כי $S_{MXNE} = S_{MYND}$.



<u>פתרון:</u> ממשפט הפרפר על המרובע $SQCP$ והמיתר AB נקבל ש-$XM = MD$ ולכן $S_{XMN} = S_{DMN}$. באופן דומה $S_{YNM} = S_{NEM}$. נחבר את שני השוויונות ונקבל את מה שרצינו להוכיח.

5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O וחוסם מעגל שמרכזו I. נסמן ב-A' את השיקוף של A ביחס ל-OI. הוכיחו כי המשיקים למעגל AIA' ב-I,A' נפגשים על BC.

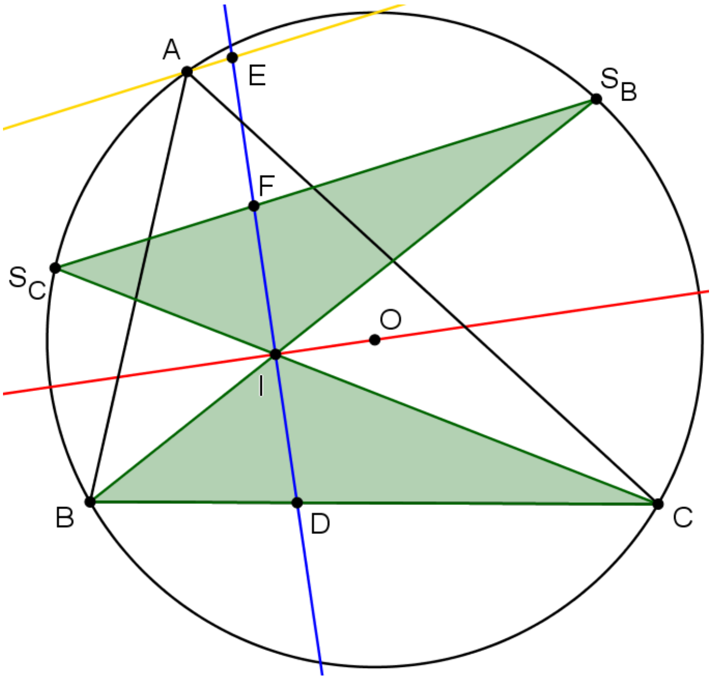


<u>פתרון:</u> נשים לב ש-OI עובר במרכז $AA'I$ ולכן המשיק ב-I הוא האנך ל-OI ב-I. נסמן ב-D,E את אמצעי הקשתות AB,AC בהתאמה. נחתוך את האנך ל-OI ב-I עם BC,DE בנקודות K,L. ממשפט הפרפר נובע ש-I הוא אמצע KL. כלומר K,L סימטריות ביחס ל-OI ולכן $AL = A'K$ אבל $AL = LI$ כי DE הוא האנך האמצעי של AI ולכן סך הכול

$$A'K = AL = LI = IK$$

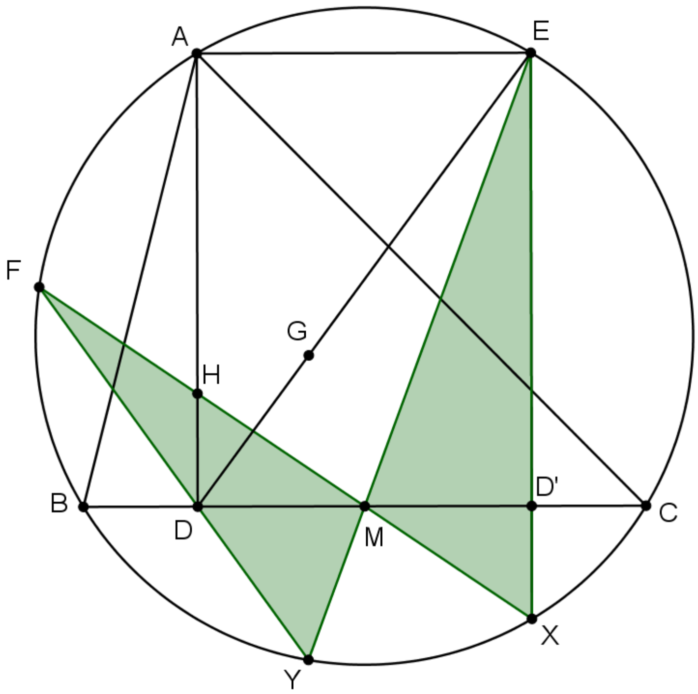
ולפיכך $A'K$ משיק ל-$AA'I$.

6. מרכז המעגל החסום במשולש ABC יסומן ב-I ומרכז המעגל החוסם יסומן ב-O. האנך ל-IO ב-I נחתך עם הצלע BC בנקודה D ועם חוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$ ב-E.
הוכיחו כי $EI = 2DI$.



<u>פתרון:</u> נסמן ב-S_B, S_C את אמצעי הקשתות (הקטנות) $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$. לפי משפט התלתן ברור ש-S_BS_C הוא האנך האמצעי של AI ולכן הוא מקביל לחוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$ ולכן הוא חוצה גם את IE.
נסמן ב-F את אמצע EI.
מפרפר ב-BCS_CS_B מקבלים I הוא אמצע DF וזה מנצח.

7. משולש ABC חסום במעגל ω. נסמן ב-G, H את מפגש הגבהים ומפגש התיכונים בהתאמה. D היא עקב הגובה מ-A ל-BC ו-M היא אמצע הצלע BC. הקרניים DG ו-MH נחתכים שנית עם ω בנקודות E, F בהתאמה.
הוכיחו כי FD, EM נחתכים על ω.



<u>פתרון:</u> נחתוך את MH שנית עם ω בנקודה X. בגלל הומותטיה עם מקדם -2 מ-G נובע ש-$AE||BC$ ומצד שני X נגדית ל-A על ω ולכן $BC \perp EX$ ו-EX נחתך עם BC ב-D'- נקודה סימטרית ל-D ביחס ל-M.
מהמשפט ההפוך לפרפר נובע ש-EM, FD נחתכים על ω (ביותר פירוט: נסמן את החיתוך של EM עם ω ב-Y אז מפרפר FM נחתך עם BC בנקודה שסימטרית ל-D' ביחס ל-M).

8. משולש ABC חסום במעגל Ω וחוסם מעגל שמרכזו I. על הצלעות BC, AC, AB נבחרו נקודות D, E, F כך ש-$DI \perp BC, EI \perp AI,$ $FI \perp AI$. המעגל AEF נחתך שנית עם Ω בנקודה X. נסמן ב-M את אמצע הצלע BC. הוכיחו כי XD, AM נפגשים על Ω.

<u>פתרון:</u> רואים אמצע מיתר עושים פרפר!

נסמן ב-D' את השיקוף של D ביחס ל-M. מהמשפט ההפוך לפרפר מספיק להוכיח ש-AD', XM נפגשים על Ω. הסיבה שזה עדיף היא שיותר קל להבין את הכיוון של XM מאשר את הכיוון של XD. בנוסף $AD'||IM$ (כי אם נסמן ב-E את הנקודה הנגדית ל-D על המעגל החסום אז מהומוטתיה AED' ישר ו-IM הוא קטע אמצעים במשולש EDD') ולכן מספיק להוכיח ש-$\angle XBA = \angle XMI$.

נשים לב ש-$\angle XBA = \angle XCA, \angle XFA = \angle XEA$ ולכן המשולשים XBF, XCE דומים אבל M, I הם האמצעים של BC, EF ולכן גם המשולש XMI דומה לשני המשולשים הנ"ל וזה מנצח.