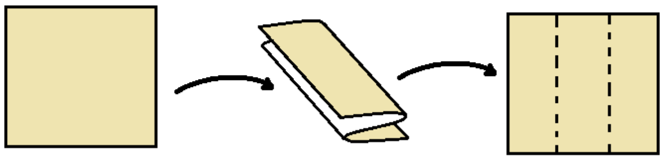
בניות באמצעות אוריגמי

איך בונים דברים? ישרים מוגדרים על ידי קיפולים + צלעות הריבוע המקורי, ונקודות מוגדרות על ידי חיתוכים בין ישרים + קודקודי הריבוע המקורי.

כללי המשחק (one-fold-axioms)

בכל צעד מותר לעשות קיפול **בודד**, שמוגדר באופן **חד משמעי** על ידי alignment בין דברים שכבר קיימים על הדף (דברים = נקודות \ קווים).

לדוגמא, הפעולה של לחלק ריבוע ל-3 מלבנים זהים על ידי שני קיפולים <u>שסימולטנית תלויים אחד בשני</u>, אסורה:



בשאלות שבהן כתוב ***תחרות בנייה!!!*** המנצח הוא מי שבונה דברים באופן אופטימלי, כאשר המטרות הן:

- מינימליזם (כמה שפחות צעדים)
- סימונים קצרים בשוליים עדיפים על פני קווי קיפול ארוכים לאורך כל הדף.

<u>הכללים שלפיהם נותנים ניקוד</u>: על כל קיפול מלא חוטפים 2 נקודות, ועל קיפול שהוא "סימון בשוליים" - נקודה אחת. המטרה לסיים עם **כמה שפחות** נקודות. (יש פרסים! 🎁)

תרגילי חימום:

(בכל התרגילים הבאים נניח שאורך צלע הריבוע היא 1)

1. א. תבנו נקודה על צלע הריבוע, שמרחקה מהקודקוד הוא $\frac{2021}{2048}$ על ידי 11 קיפולים (אחרי כל קיפול פותחים את הדף).
   ב. הציעו אלגוריתם לבניית שבר דיאדי כללי (כלומר מספר מהצורה $\frac{m}{2^n}$) תוך n צעדים.

2. א. ***תחרות בנייה!!!*** תחלקו צלע של ריבוע ל-3, 5, 7, 11 חלקים שווים.
   ב. הציעו אלגוריתם כללי איך לבנות נקודה על צלע של ריבוע, שמרחקה מהקודקוד הוא $\frac{a}{b}$. כמה צעדים דורשת השיטה שלכם כתלות ב-a, b ?

3. ***תחרות בנייה!!!*** תבנו על צלע הריבוע קטעים שאורכם:

א. $\sqrt{2}-1$

ב. $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

ג. $\frac{1}{\phi}$ (ϕ יחס הזהב)

ד. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

ה. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ו. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

ז. $\sqrt{8}-\sqrt{7}$

ח. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{10}}$

הערה: כל מה שעשינו עד עכשיו היה אפשר לעשות גם עם סרגל ומחוגה! ועכשיו נתקדם לדברים שאי אפשר לעשות עם סרגל ומחוגה, אבל כן עם אוריגמי. לפני זה נדבר קצת על איזה סוגי קיפולים בכלל יש.

[מיון של אקסיומות Huzita-Hatori-Justin - במצגת]

כעת נתחיל משתי בעיות קלאסיות שידוע שהן לא פתירות באמצעות סרגל ומחוגה: שילוש זווית והכפלת הקובייה.

שילוש זווית! (angle trisection)

1. (***Abe trisection***)

הוכיחו שהבנייה הבאה עובדת לכל זווית חדה:

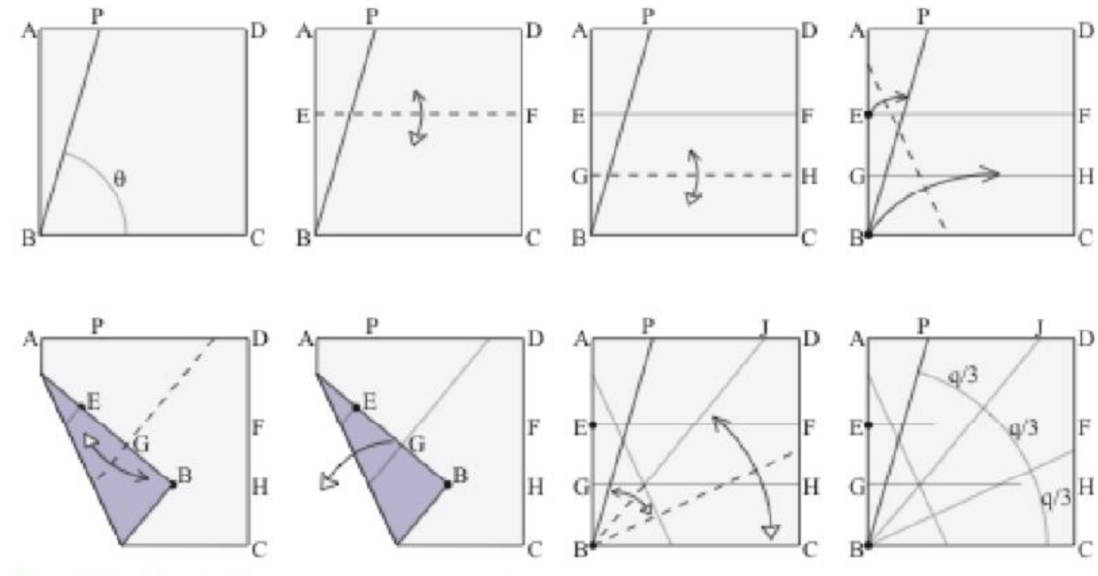


Figure 25. Hisashi Abe's trisection of an arbitrary acute angle.

From "Origami and geometric constructions" by Robert Lang, p. 33

2. (***Justin trisection***)

הוכיחו שהבנייה הבאה עובדת לכל זווית קהה:

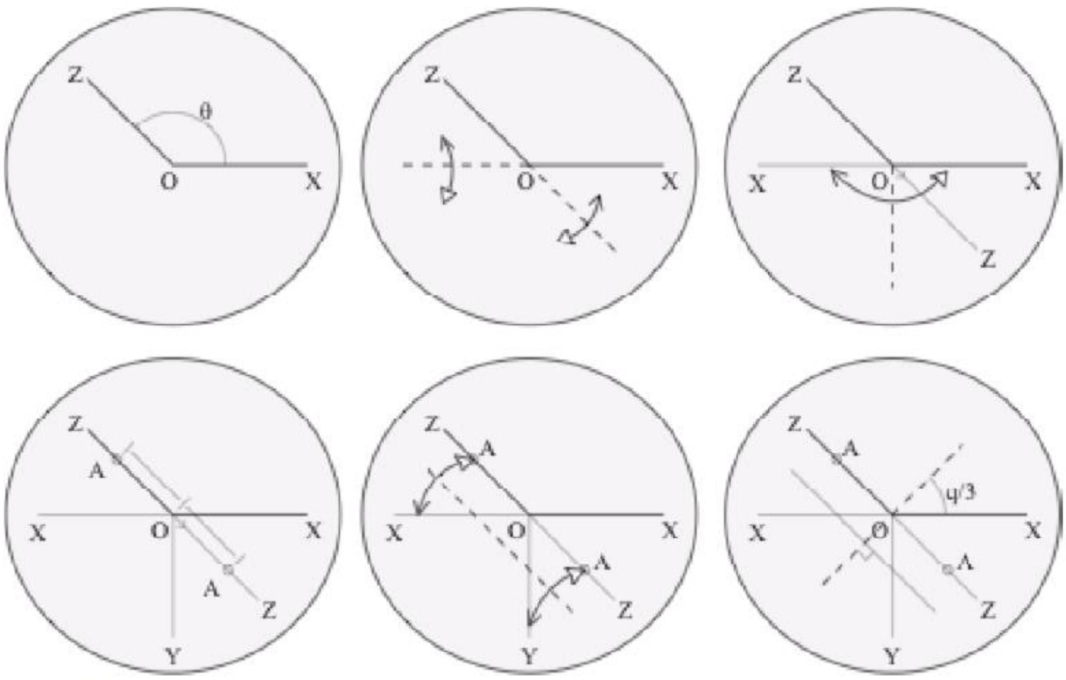
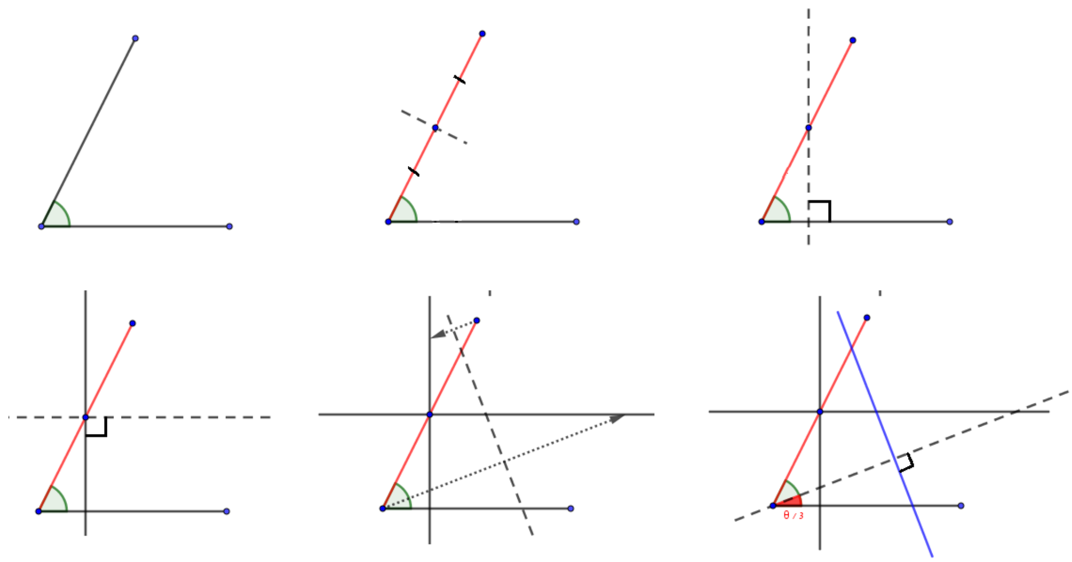


Figure 26. Jacques Justin's trisection of an obtuse angle.

From "Origami and geometric constructions" by Robert Lang, p. 34

3. (***Martin Trisection***)

הוכיחו שהבנייה הבאה עובדת לכל זווית חדה:



From "The Mathematics of origami" by Moti-Ben-Ari p. 24

הכפלת הקובייה! (doubling the cube)

1. (**Messer's construction**)

הפעם לא נניח שאורך צלע הריבוע היא 1. הוכיחו שהבנייה עובדת ושהיחס בין הקטעים המסומנים בתמונה מימין הוא $\sqrt[3]{2}:1$

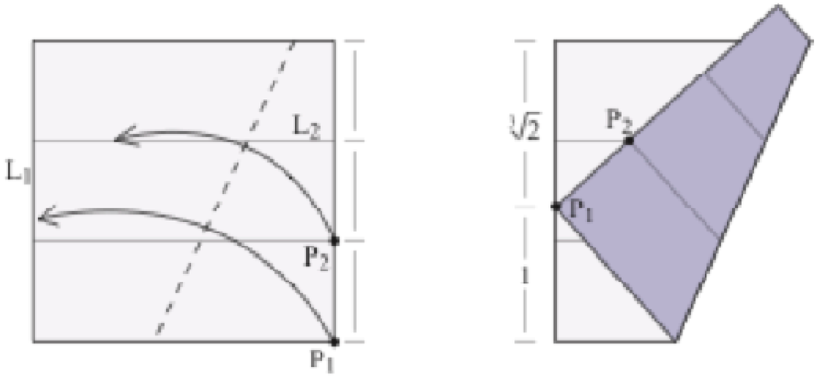


Figure 34. Peter Messer's construction of $\sqrt[3]{2}$.

From "Origami and geometric constructions" by Robert Lang, p. 46

2. (**Beloch construction**)

א. <u>**זה תרגיל ממש חשוב כי זה יאפשר לנו בהמשך למצוא שורש ממשי לכל פולינום ממעלה שלישית! זה נקרא בעיית הריבוע של Margherita Beloch**</u>:

נתונות נקודות A, B וישרים r, s במישור. תבנו ריבוע $WXYZ$ כך ששני קודקודים סמוכים שלו X, Y נמצאים על הישרים r, s בהתאמה, וכך שהנקודות A, B נמצאות על הישרים WX, YZ בהתאמה:

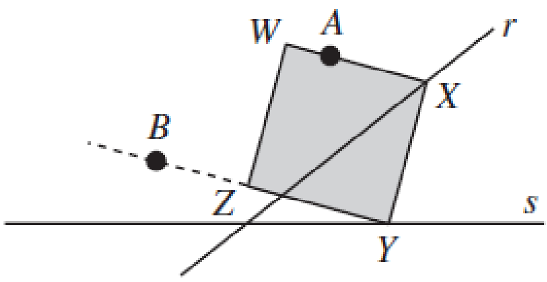


Figure 4. The Beloch square.

From "Solving cubics with creases – the work of Beloch and Lill" by Thomas Hull p.308 Amer. Math. Month.

ב.(*) תבנו באמצעות הסעיף הקודם את $\sqrt[3]{2}$

פולינומים כלליים ממעלה שלישית! (*Beloch & Lill*)

השיטה של *Lill* לפולינומים ממעלה *n* :

נתון לנו צב, ופולינום $f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$.

הצב זז לאורך קו שבור באופן הבא:

אחרי כל צעד, הצב מסתובב שמאלה ב*90°* והולך מרחק a_k . אם הסימן חיובי, הוא הולך לכיוון שבו הוא מסתכל, ואם הסימן שלילי הצב הולך עם הגב (אבל לא מסתובב לאחור!) הצב מתחיל מהמקדם המוביל.

כשהצב מסיים את המסלול, אנחנו יוצאים מנקודת ההתחלה, אבל בזווית θ ביחס לכיוון ההתחלתי שלו, ומנסים לתפוס את הצב, כאשר בכל פעם שאנחנו נחתכים עם אחד מהישרים שעל גביהם היה חלק ממסלול הצב, אנחנו פונים ב-*90°* לכיוון הישר הבא.

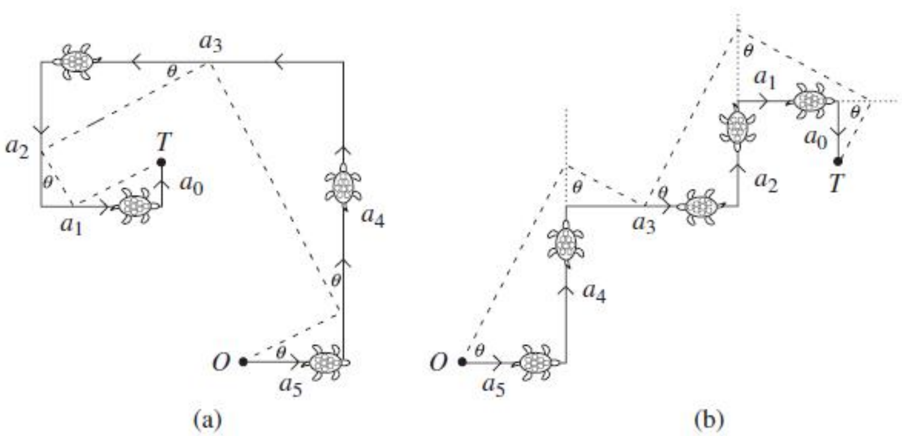


Figure 7. Lill's method turtle and bullet paths (a) for a quintic with all coefficients positive and (b) a quintic with $a_3, a_2, a_0 < 0$ and $a_5, a_4, a_1 > 0$.

From "Solving cubics with creases – the work of Beloch and Lill" by Thomas Hull p.311 Amer. Math. Month.

1. הוכיחו שאם הצלחנו לתפוס את הצב אז מתקיים ש- $-\tan(\theta)$ הוא שורש של הפולינום $f(x)$.
2. הוכיחו שהקטעים של המסלול של המרדף אחרי הצב, פרופורציוניים למקדמי הפולינום $g(x)$ כאשר: $f(x) = (x + \tan(\theta))g(x)$
3. תשלבו את זה עם בעיית הריבוע של Beloch כדי לקבל בנייה למציאת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלישית.

תרגילים על השיטה של *Lill* ו-*Beloch* :

1. כמה מלבנים אפשר לחסום בתוך מלבן (כשמתחילים מנקודה נתונה)? (כאשר כל קדקוד של המלבן הפנימי נמצא על צלע אחרת של המלבן החיצוני)
2. נתון משושה קמור שכל זוויותיו הן 120 מעלות, ושאם צובעים את צלעותיו לסירוגין בכחול וצהוב אז כל הצלעות הכחולות שוות וכל הצהובות גם שוות. כמה משושים שכל זוויותיהם 120 מעלות אפשר לחסום בתוכו (כשמתחילים מנקודה נתונה)?
3. (**) הצב של *Lill* לגמרי השתכר, ועכשיו הוא פונה בכל פעם 120 מעלות שמאלה ביחס לכיוון שבו הוא היה קודם, ונתון שמסלול התנועה של הצב זה מגן דוד. נסו לתפוס את הצב (לפי כללי המשחק של *Lill*)
4. תבנו מצולע משוכלל עם 7 צלעות (רמז: נסו למצוא פולינום ממעלה 3 שמתאפס על $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ ואז להשתמש בשיטה של הצב)
5. (***) תנסו לבנות מצולע משוכלל עם 13 צלעות.

ביבליוגרפיה (למי שרוצה לקרוא עוד)

השתמשתי בעיקר ב-3 מאמרים:

"Solving cubics with creases – the work of Beloch and Lill" by Thomas Hull Amer. Math. Month.

"Origami and geometric constructions" by Robert Lang

"The Mathematics of origami" by Moti-Ben-Ari

יש נושאים סופר-מגניבים שלא נגענו בהם כמו למשל – *multi-folding-axioms*

כשדיברנו על אקסיומות *Huzita Hatori Justin* ועל מה אפשר לעשות – תמיד אמרנו שבכל צעד מותר לעשות רק קיפול אחד ואסור ששני קיפולים סימולטנית יהיו תלויים אחד בשני.

אפשר לשאול מה קורה אם כן מאפשרים את זה? מה אז אפשר לבנות? אז מסתבר שאפשר לבנות יותר דברים! למשל אפשר לחלק זווית ל5 חלקים!

יש לרוברט לאנג ולרוג'ר אלפרין מאמר על זה:

"One, two and multi-fold origami axioms" by Robert Lang and Roger Alperin

ובאופן כללי אני מאוד ממליץ על האתר של רוברט לאנג – יש שם ממש הרבה דברים מגניבים.