

תרגיל מספרים

1. נתון שעבור פולינום במקדמים שלמים מסוים מתקיים $n \mid p(2^n)$ עבור כל n טבעי, הוכיחו שזהו פולינום האפס.

2. עבור $a > 1$ הוכיחו ש- $2^{2^n} + a$ לא תמיד ראשוני.

3. נגדיר סדרה בצורה הבאה:

$$\begin{cases} p_1 = 2 \\ p_{n+1} = mpd(p_1 p_2 \dots p_n + 1) \end{cases}$$

כאשר mpd של מספר זה הראשוני הגדול ביותר שמחלק אותו. הראו שהסדרה אף פעם לא מקבלת את 11.

4. פולינום במקדמים שלמים נקרא אחלה, אם עבור כל ראשוני יש מספר שלם כך שאם נציב אותו בפולינום התוצאה תתחלק בראשוני. האם קיים M כך שלכל פולינום אחלה יש גורם אי-פריק מדרגה לכל היותר M ?

5. הוכיחו שלכל m, n טבעיים קיימים אינסוף זוגות של מספרים זרים a, b כך ש:

$$a + b \mid an^a + bm^b.$$

6. מצאו את כל הסדרות החשבוניות של מספרים טבעיים a_n כך שקיים N חיובי, כך שלכל k

$$\text{מתקיים: } a_1 a_2 \dots a_k \mid a_{N+1} a_{N+2} \dots a_{N+k}.$$

7. הוכיחו ש- $1! + 2! + \dots + n!$ יכול להתחלק בראשוני גדול כרצוננו.

8. נתון k טבעי, מצאו את כל הפונקציות מהטבעיים לעצמם, כך שקיימים אינסוף ראשוניים שהחזקה ה- k שלהן מתקבלת בתמונה, וגם לכל m, n מתקיים:

$$f(n) + f(m) \mid f(m+n).$$

9. עבור שתי תמורות של הטבעיים a_n, b_n נגיד ש- a מחלק את b אם עבור כל k מתקיים:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \mid b_1 + b_2 + \dots + b_k.$$

הוכיחו שיש סדרה אינסופית של תמורות בה כל אחת מתחלקת בקודמת. הערה: תמורה של הטבעיים היא סידור מחדש של הטבעיים בשורה.

בתאבון!