בניות בתורת המספרים

1. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שקיימים מספרים שלמים $1<a_1<a_2<\ldots<a_n$ שעבורם $\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{51}{2010}$.

2. האם קיימת סדרה אינסופית $\{a_n\}$ של טבעיים כך ש- a_m,a_n זרים אם ורק אם $|m-n|=1$?

3. מספר טבעי $n\geq 2$ ייקרא r-מגניב אם קיימת תמורה $(a_1,\ldots,a_n)$ של $\{1,2,\ldots,n\}$ כך שלכל $1\leq i\leq n-1$, $a_ia_{i+1}+1$ חזקה מסדר r של מספר שלם.

א. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים 2-מגניבים.

ב. הוכיחו כי לא קיימים מספרים 3-מגניבים.

4. לכל n טבעי נסמן ב-$d(n)$ את מספר המחלקים החיוביים של n. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים a כך ש-$d(an)\neq n$ לכל n טבעי.

5. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים פריקים n כך ש- $n|3^{n-1}-2^{n-1}$.

6. הראו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים n כך ש-n מחלק את $2^{2^n+1}+1$ אבל לא את 2^n+1.

7. הוכיחו כי קיים מספר טבעי a כך שקיימים לפחות 2018 ערכים של n המקיימים $\varphi(n)=a$.

8. נתון מספר ראשוני p. הראו כי קיים ראשוני q כך ש- n^p-p לא מתחלק ב-q לכל n טבעי.

9. מצאו את כל השלמים החיוביים k כך שקיימת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת $\gcd\left(f(m)+n,f(n)+m\right)\leq k$ לכל m,n טבעיים שונים.

10. האם קיימים 100 מספרים טבעיים,

א. שלא עולים על $20{,}000$, כך שכל סכומי הזוגות מתוכם שונים זה מזה?

ב. שלא עולים על $9{,}000{,}000$, כך שכל סכומי השלשות מתוכם שונים זה מזה?

בתאבון!