בניות בתורת המספרים

1. הראו כי לכל m טבעי קיים n כך שכל המספרים $2^n - m, 2^n - m + 1, \dots, 2^n + m$ חיוביים ופריקים.

2. נקרא לטבעיים m, n **חברים** אם יש להם את אותם מחלקים ראשוניים. האם קיימים אינסוף זוגות חברים (m, n) כך שגם $(m+1, n+1)$ חברים?

3. מספר n יקרא **מגניב** אם קיימת תמורה $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ של $(1,2,\dots,n)$ כך שהמספר $a_i a_{i+1} + 1$ ריבוע שלם לכל $1 \le i \le n-1$. הוכיחו שקיימים אינסוף מספרים מגניבים.

4. לכל n טבעי נסמן ב-$d(n)$ את מספר המחלקים החיוביים של n. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים a כך ש-$d(an) \neq n$ לכל n טבעי.

5. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים פריקים n כך ש- $n | 3^{n-1} - 2^{n-1}$.

6. הראו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים n כך ש-n מחלק את $2^{2^n+1} + 1$ אבל לא את $2^n + 1$.

7. יהי $p > 2$ ראשוני. עבור k שלם, $d_p(k)$ זו שארית החלוקה של k ב- p. סדרה $a_0, a_1, \dots$ תקרא **טובה** אם $p \nmid a_0$ ו- $a_{n+1} = a_n + d_p(a_n)$ לכל $n \ge 0$. האם לאינסוף ראשוניים p קיימות סדרות טובות a_i, b_i עבורן:

א) $a_n > b_n$ לאינסוף n וגם $b_n > a_n$ לאינסוף n?

ב) $a_0 < b_0$ אבל $a_n > b_n$ לכל $n > 0$?

8. הראו כי קיימות אינסוף שלשות (a, b, p) של מספרים שלמים חיוביים כך ש-p ראשוני, $p > a, b$ ו-$p^3 | (a+b)^p - a^p - b^p$.

9. יהי $n > 1$ אי-זוגי. הראו שקיימים $a, b > 0$ שלמים כך שאם $Q(x) = (x+a)^2 + b$:

- $(a, n) = (b, n) = 1$
- $n | Q(0)$
- לכל אחד מהמספרים $Q(1), Q(2), \dots$ יש מחלק ראשוני זר ל- n.

בתאבון!