תרגיל מספרים

1. הספרה הכי ימנית מבין הספרות העשרוניות הלא-אפסיות של $n!$ היא a_n. האם הסדרה a_n היא מחזורית החל ממקום מסוים?

2. פתרו בטבעיים: $a!+b!+c!=2^d$.

3. מצאו את $\dfrac{\operatorname{lcm}(1,2,3,\dots,n+1)}{\operatorname{lcm}\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n}\right)}$.

4. מספר טבעי n נקרא חלק אם קיימים מספרים שלמים $a_1,a_2,\dots,a_n$ עבורם

$$a_1+a_2+\dots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=n.$$

מצאו את כל המספרים החלקים.

5. מצאו את כל השלמים k עבורם קיימים אינסוף שלמים חיוביים n כך ש-$n+k$ לא מחלק את $\binom{2n}{n}$.

6. לפתור בשלמים חיוביים: $x^y\cdot y^x=(x+y)^z$.

7. הוכיחו שקיימת פונקציה $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ עבורה מתקיים

(א) הקבוצה $\{f(x):x\in\mathbb{Z}_{>0}\}$ סופית; וכן

(ב) לכל $x_0,x_1,\dots,x_{999}\in\mathbb{Z}_{\neq 0}$ עם $f(|x_0|)=f(|x_1|)=\cdots=f(|x_{999}|)$ מתקיים $x_0+2x_1+4x_2+\cdots+2^{999}x_{999}\neq 0$.

8. נתון מספר טבעי n. מצאו את ה-m הקטן ביותר עבורו קיימת סדרת שלמים חיוביים

$$a_1<a_2<a_3<\dots<a_n=m$$

עבורה המספרים $\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2},\dfrac{a_2^2+a_3^2}{2},\dots,\dfrac{a_{n-1}^2+a_n^2}{2}$ כולם ריבועים שלמים.

9. נסמן $c_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, ונגדיר $S_n=c_1+c_2+\dots+c_n$.

הראו כי $S_n=1\pmod 3$ אם ורק אם ברישום הטרינארי של $n+1$ מופיעה הספרה 2.