משפט האפסים הקומבינטורי – אוסף בעיות

1) ליד כל אחד מקודקודיו של מצולע בעל 100 צלעות כתובים שני מספרים שונים. הוכיחו כי ניתן למחוק מספר אחד ליד קודקוד (ולהשאיר אחד), כך שליד כל שני קודקודים סמוכים יהיו כתובים מספרים שונים.
(רוסיה 2007)

2) יהא p ראשוני, ותהיינה A,B שתי קבוצות של שאריות ב-$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. אזי
$$|A+B| \geq \min(p, |A|+|B|-1)$$
(משפט Cauchy-Davenport)

3) תהא A מטריצה $n\times n$ מעל שדה F כך ש- $Per(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_i A_{i,\sigma_i} \neq 0$. תהיינה $S_1,\dots,S_n \subseteq F$ קבוצות בגודל 2, ו-$b_1,\dots b_n \in F$ איברים. הוכיחו כי קיים $x\in S_1\times\cdots\times S_n$ כך ש-$(Ax)_i \neq b_i$ לכל i.
(למת הפרמננט)

4) יהי p ראשוני, ויהיו $a_1,\dots a_{2p-1}$ שלמים. הוכיחו כי קיימת קבוצת אינדקסים $I\subseteq\{1,\dots,2p-1\}$ עם $|I|=p$ כך ש- $\sum_{i\in I} a_i$ מתחלק ב-p.
(ארדש-גינזבורג-זיו)

5) יהי n מספר שלם חיובי. נגדיר את
$$S = \{(x,y,z) : x,y,z\in\{0,1,\dots,n\}, x+y+z>0\}$$
כקבוצה של $(n+1)^3-1$ נקודות במרחב התלת ממדי. מצא את המספר הקטן ביותר האפשרי של מישורים, כך שהאיחוד שלהם מכיל את S אבל אינו מכיל את $(0,0,0)$.
(IMO 2007, Q6)

6) ישנה משפחה של 2^n+1 קבוצות שונות, שמחולקות לשני צבעים – כחולות ואדומות. לוקחים את כל הקבוצות שהן הפרש סימטרי של קבוצה כחולה וקבוצה אדומה. הוכיחו כי מתקבלות לפחות 2^n קבוצות שונות.
(TSTST 2011/9)

7) יהא p ראשוני, ויהיו $P_1,\dots,P_m$ פולינומים ב-n-משתנים בעלי מקדמים ב-$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. הוכיחו כי אם $\sum_{i=1}^m \deg P_i < n$ ולפולינומים $P_1,\dots,P_m$, יש שורש משותף $(c_1,\dots,c_n)$, אזי יש להם עוד שורש משותף.
(משפט Chevalley-Warning)

8) פיראט שט מסביב לים העגול, שאורכו p קילומטרים (p ראשוני). נקודת ההתחלה שלו שלמה אך לא ידועה. מהירות הפיראט היא b קמ"ש בכיוון השעון, שלמה אך לא ידועה גם כן (כך שבכל שעה עגולה הפיראט נמצא ליד אחד מ-p סימני הקילומטר שיש בים העגול). התותח של משמר החופים יודע לירות פעם בשעה בדיוק, בכל שעה עגולה. כמה שעות נדרשות למשמר החופים על מנת להטביע בוודאות את הפיראט?
(יוני 2012, תחרות קבוצתית, שאלה 10)

9) יהיו $m,n\geq 2$ שלמים. יהא $f(x_1,\dots,x_n)$ פולינום עם מקדמים ממשיים המקיים $f(x_1,\dots,x_n) = \left\lfloor\frac{(x_1+\cdots+x_n)}{n}\right\rfloor$ לכל $x_1,\dots,x_n\in\{0,1,\dots,m-1\}$. הוכיחו כי המעלה הכוללת של f היא לפחות n.
(IMOSL 2018, A6)

10) יהא p ראשוני, $S_1,\dots,S_k\subseteq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ קבוצות שמכילות את 0, עם $\sum(|S_i|-1)\geq p$, ויהיו $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. אזי למשוואה $\sum a_i x_i = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי ב- $S_1\times\cdots\times S_k$.
(משפט Troi-Zannier)

11) יהא p ראשוני, יהא G גרף חסר לולאות (לאו דווקא פשוט) עם דרגה מקסימלית $2p-1$ ודרגה ממוצעת גדולה מ-$2p-2$. הוכיחו כי ל-G יש תת-גרף p-רגולרי.

12) יהא p ראשוני, ותהיינה $A_0,\dots,A_k$ קבוצות של שאריות ב-$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, כך ש-$|A_i|\neq|A_j|$. אזי
$$\left|\{a_0+\cdots+a_k : a_i\in A_i, a_i\neq a_j\}\right| \geq \min\left(p, \sum_{i=0}^k |A_i| - \binom{k+2}{2} + 1\right)$$