תרגיל מספרים

1. יהי p ראשוני ו-$a_1, \dots, a_p$ שלמים. הראו כי קיים שלם k כך שהמספרים

$$a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_p + pk$$

יוצרים לפחות $\frac{p}{2}$ שאריות שונות מודולו p.

2. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם לכל זוג (a, b) של מחלקים זרים של n, גם $a + b - 1$ מחלק את n.

3. יהי $p \geq 5$ ראשוני. הראו כי קיים $1 \leq a \leq p - 2$ עבורו $a^{p-1} - 1$ וגם $(a + 1)^{p-1} - 1$ לא מתחלקים ב-p^2.

4. מצאו את כל הראשוניים p עבורם $p! + p$ הוא ריבוע שלם.

5. יהי $p \equiv 2 \ mod \ 3$ ראשוני. נגדיר תמורה π על השאריות מודולו p באופן הבא: $\pi(x) \equiv x^3 \ mod \ p$. מצאו את כל ה-$p$-ים עבורם π זו תמורה זוגית.

6. יהי p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{2^i}{i} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{i} \ mod \ p$$

7. מצאו את כל השלמים $b > 2$ עבורם קיימים אינסוף שלמים חיוביים n כך ש-$n^2 | b^n + 1$.

8. יהי c ממשי חיובי.

א. הראו כי קיים n כך ש-

$$\frac{\sigma(\varphi(n))}{\varphi(\sigma(n))} > c$$

ב. הראו כי קיים n כך ש-

$$\frac{\sigma(\varphi(n))}{\varphi(\sigma(n))} < c$$

9. נתון ראשוני אי-זוגי p ושלמים חיוביים a, b שלא מתחלקים ב-p. נתבונן בסדרות $a_n = v_p(a^n + b), b_n = v_p(b^n + a)$. ידוע שבשבתי הסדרות יש איבר חיובי. הראו כי לפחות אחת הסדרות לא חסומה.

10. הוכיחו כי קיימים אינסוף שלשות (a, b, p) של שלמים כך ש-p ראשוני, $0 < a \leq b < p$ ומתקיים ש-$p^5 | (a + b)^p - a^p - b^p$.